

Plaquette 5 - Formule de Taylor et approximations numériques

Développements limités — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Un développement limité dit que l'erreur est **négligeable** près du point ; la formule de **Taylor-Lagrange** (ou l'inégalité de Taylor-Lagrange) dit **combien** elle vaut au plus, pour un x donné. Pour approcher une valeur (e , $\sin 0,1$, $\ln 1,2$), on choisit un point de développement proche, on calcule le polynôme de Taylor, puis on **majorer le reste** par $\frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$, où M majore $|f^{(n+1)}|$ entre a et x . On ajuste l'ordre n pour atteindre la précision voulue.

Exercice 1 - Approcher e

En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'exponentielle entre 0 et 1, montrer que $0 \leq e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq \frac{3}{(n+1)!}$. Quel n assure une erreur inférieure à 10^{-4} ?

Exercice 2 - Le sinus de 0,1

Approcher $\sin 0,1$ par $x - \frac{x^3}{6}$ et majorer l'erreur commise.

Exercice 3 - Le cosinus de 1

Approcher $\cos 1$ par son polynôme de Taylor d'ordre 4 en 0, et majorer l'erreur.

Exercice 4 - Une inégalité par Taylor

Montrer, avec la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, que pour tout $x \geq 0$: $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

Exercice 5 - Une série pour $\ln 2$

On admet que $\ln 2 = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$. Montrer que le reste après n termes est majoré par $\frac{1}{(n+1)2^n}$, et en déduire le nombre de termes pour une précision de 10^{-3} .

Exercice 6 - Racine de 10

Approcher $\sqrt{10}$ en écrivant $\sqrt{10} = 3\sqrt{1 + \frac{1}{9}}$ et en utilisant le DL de $\sqrt{1+u}$ à l'ordre 2.

Exercice 7 - L'approximation du pendule

En physique, on remplace $\sin \theta$ par θ pour les petites oscillations. Quelle est l'erreur relative $\frac{\theta - \sin \theta}{\theta}$ pour $\theta = 10^\circ$? Pour quel angle atteint-elle 1 % ?

Exercice 8 - Le facteur de Lorentz

En relativité, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ où $\beta = \frac{v}{c}$. Donner un DL de γ à l'ordre 2 en β , et comparer à la valeur exacte pour $\beta = 0,1$.

Exercice 9 - Dérivées à partir d'un DL

Calculer $f^{(5)}(0)$ pour $f(x) = x^2 e^x$, sans dériver cinq fois.

Exercice 10 - Somme alternée et erreur

On approche $\cos 0,5$ par $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. Majorer l'erreur par le premier terme négligé, et vérifier.

Exercice 11 - Arctangente de 1/2

Approcher $\arctan \frac{1}{2}$ avec le développement $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$, et majorer l'erreur par le premier terme négligé.

Exercice 12 - La limite $n(e - (1 + 1/n)^n)$

Montrer que $n\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) \rightarrow \frac{e}{2}$, et vérifier numériquement pour $n = 100$.

Exercice 13 - Choisir le point de développement

Pour approcher $\ln 1,9$, vaut-il mieux développer $\ln(1+x)$ en 0 avec $x = 0,9$, ou écrire $\ln 1,9 = \ln 2 + \ln(1 - 0,05)$? Estimer l'erreur avec deux termes dans chaque cas.

Exercice 14 - Vrai ou faux ?

- a) Si $f(x) = P(x) + o(x^n)$ en 0, l'erreur $|f(x) - P(x)|$ est petite pour tout $x \in [0; 1]$.
- b) L'inégalité de Taylor-Lagrange donne une borne valable pour un x fixé, pas seulement « à la limite ».
- c) Pour approcher e^{10} , le polynôme $\sum_{k=0}^5 \frac{x^k}{k!}$ en $x = 10$ suffit.
- d) Le reste de Taylor-Lagrange de $\exp$ en $x > 0$ est toujours positif.

Exercice 15 - Synthèse : $\ln 1,2$ avec certitude

- a) Montrer que pour $x \geq 0$, $\left| \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) \right| \leq \frac{x^4}{4}$.
- b) En déduire un encadrement de $\ln 1,2$ et le comparer à la valeur exacte.