

Développements limités et formules de Taylor — L1

Comparaisons, Taylor-Young, DL usuels, opérations, limites et asymptotes

1. Comparaisons

Quand $x \rightarrow a$:

$$f = o(g) \iff \frac{f}{g} \rightarrow 0.$$

$$f = O(g) \iff \frac{f}{g} \text{ reste borné.}$$

$$f \sim g \iff \frac{f}{g} \rightarrow 1.$$

Et $f \sim g \iff f = g + o(g)$.

$\sim$ se manipule bien dans les produits/-quotients, **pas dans les sommes** en général.

2. Définition d'un DL

DL d'ordre n en a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Le DL, s'il existe, est unique.

Pour se ramener en 0, poser $h = x - a$ et développer $f(a+h)$.

3. Taylor-Young

Sous les hypothèses usuelles :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n).$$

À l'ordre 2 :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + o(h^2).$$

4. DL usuels : exp, ln

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

Donc :

$$e^x - 1 \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x.$$

5. Sinus et cosinus

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

Ainsi

$$\sin x \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}.$$

Parité : sin n'a que des puissances impaires, cos que des paires.

6. Puissances et inverse

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + o(x^3).$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3).$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3).$$

7. DL dérivés utiles

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3).$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

8. Somme et produit

Somme : mettre les DL au même ordre, puis additionner.

Produit : multiplier les polynômes et supprimer les degrés $> n$.

Ex. ordre 3 :

$$e^x \cos x = 1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

9. Quotient

Si le dénominateur tend vers une constante non nulle, utiliser

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \dots$$

S'il tend vers 0, **factoriser d'abord** le premier terme non nul :

$$\frac{x^p(A+\dots)}{x^q(B+\dots)} = x^{p-q} \frac{A+\dots}{B+\dots}.$$

10. Composition

Pour $F(u(x))$:

1. vérifier $u(x) \rightarrow 0$;
2. écrire le DL de $F(t)$;
3. remplacer t par $u(x)$;
4. développer et tronquer.

Ex. :

$$\ln(1+\sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

11. Primitivation

Si

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n),$$

alors une primitive F vérifie

$$F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$$

Utile pour $\ln(1+x)$, $\arctan x$, etc.

12. Limites : méthode

1. repérer les compensations ;
 2. choisir l'ordre minimal utile ;
 3. développer au même ordre ;
 4. factoriser le premier terme non nul.
- $$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \frac{\sin x - x}{x^3} \rightarrow -\frac{1}{6}.$$

13. Tangente et position

Tangente en a :

$$T(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Si

$$f(x) - T(x) = c_p (x-a)^p + o((x-a)^p),$$

le premier terme non nul donne la position locale.

p pair : même côté des deux côtés. p impair : traversée de la tangente.

14. À l'infini

Pour $x \rightarrow +\infty$, poser

$$u = 1/x.$$

Factoriser d'abord la puissance dominante.

Ex. :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + x} &= x\sqrt{1 + 1/x} \\ &= x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o(1/x).\end{aligned}$$

Asymptote : $y = x + 1/2$.

15. Équivalents usuels

Quand $x \rightarrow 0$:

$$\sin x \sim x, \quad \tan x \sim x,$$

$$e^x - 1 \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x,$$

$$1 - \cos x \sim x^2/2,$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad (\alpha \neq 0).$$

Utiliser surtout dans produits/quotients.

16. Pièges à éviter

- $\sim$ n'est pas une égalité.
- Ne pas remplacer un terme par un équivalent dans une somme avec compensation.
- Ne pas composer une équivalence sans justification.
- Ne pas additionner des DL d'ordres différents sans tronquer.
- Un DL trop court ne voit pas le premier terme survivant.
- Dans une composition, vérifier le centre du DL.

17. Ordre à choisir

Principe : aller jusqu'au **premier terme non nul après simplification**.

Ex. pour

$$\frac{e^x - 1 - x - x^2/2}{x^3},$$

il faut e^x à l'ordre 3 :

$$\boxed{\text{limite} = 1/6.}$$

18. Contrôles rapides

Avant de conclure :

- ordre du reste correct ?
- parité respectée ?
- termes de degré $> n$ supprimés ?
- dénominateur inversé avec terme constant non nul ?
- signe du premier terme cohérent ?

19. Calculs avec o

Pour $p, q > 0$:

$$o(x^p) + o(x^p) = o(x^p),$$

$$x^q o(x^p) = o(x^{p+q}).$$

Si $p < q$, alors $x^q = o(x^p)$ en 0.

Toujours comparer les restes au **même point** et dans la même variable.

20. Premier terme non nul

Si

$$f(x) = a_p x^p + o(x^p), \quad a_p \neq 0,$$

alors

$$\boxed{f(x) \sim a_p x^p.}$$

C'est le moyen standard d'extraire un équivalent à partir d'un DL.

21. DL en un point a

Poser $h = x - a$. Exemple :

$$\ln x = \ln(1+h), \quad h = x - 1,$$

d'où, lorsque $x \rightarrow 1$,

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2).$$

22. Trois limites flash

$$\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{2},$$

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2},$$

$$\frac{\tan x - x}{x^3} \rightarrow \frac{1}{3}.$$

Le DL doit atteindre le premier terme qui subsiste.

23. Taylor–Young vs reste borné

Taylor–Young donne un reste **asymptotique** :

$$R_n(h) = o(h^n).$$

Il sert surtout aux équivalents et limites.

Les formules de Taylor avec reste explicite (ex. Taylor–Lagrange) répondent à une autre question : **majorer l'erreur** sur un intervalle.

24. Checklist avant calcul

1. Où tend la variable ?
2. Quel est le centre du DL ?
3. Jusqu'à quel ordre faut-il aller ?
4. Y a-t-il une compensation ?
5. Le reste final est-il assez petit ?
6. Peut-on conclure par le premier terme non nul ?