

Développements limités et formules de Taylor en L1 maths

Négligeabilité, équivalents, Taylor–Young, DL usuels, opérations et calcul de limites

Idée directrice. Un développement limité (DL) remplace localement une fonction par un polynôme, avec un contrôle précis de l'erreur. C'est un outil de comparaison : il permet de lever des formes indéterminées, de déterminer la position d'une courbe par rapport à sa tangente et de construire des développements asymptotiques à l'infini.

1. Relations de comparaison au voisinage d'un point

Dans toute cette section, a peut être un réel ou $\pm\infty$, et les fonctions sont considérées au voisinage de a là où les quotients écrits ont un sens.

Négligeabilité

On dit que f est **négligeable devant** g au voisinage de a , et l'on écrit

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \rightarrow a),$$

si

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0.$$

Autrement dit, f est d'un ordre de grandeur strictement plus petit que g .

Domination

On écrit

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \rightarrow a)$$

si le quotient $f(x)/g(x)$ reste borné au voisinage de a . De façon équivalente, il existe $C > 0$ tel que, suffisamment près de a ,

$$|f(x)| \leq C|g(x)|.$$

Équivalence

On dit que f et g sont **équivalentes** au voisinage de a , et l'on écrit

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \rightarrow a),$$

si

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1.$$

C'est la même chose que $f = g + o(g)$.

Règles utiles

Au voisinage de a :

- $f = o(g)$ et $g = o(h)$ impliquent $f = o(h)$;
- $f \sim g$ et $g \sim h$ impliquent $f \sim h$;
- $f \sim g$ permet de remplacer f par g dans un **produit** ou un **quotient** (sous réserve que les quotients soient définis) ;
- $f = o(g)$ implique $f = O(g)$.

Piège classique

L'équivalence ne se comporte pas comme une égalité. En général, on ne peut pas remplacer un terme par un équivalent **dans une somme ou une différence**, car des termes dominants peuvent se compenser. De même, une composition par une fonction quelconque ne conserve pas automatiquement l'équivalence.

Exemple

Quand $x \rightarrow 0$, $\sin x \sim x$ et $-x \sim -x$, mais écrire

$$\sin x - x \sim x - x = 0$$

n'a aucun sens. Il faut conserver un ordre supplémentaire :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

donc

$$\sin x - x \sim -\frac{x^3}{6}.$$

2. Qu'est-ce qu'un développement limité ?

Définition

Soit f définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Dire que f admet un **développement limité d'ordre n en a** signifie qu'il existe des réels $c_0, \dots, c_n$ tels que

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

quand $x \rightarrow a$.

Le polynôme

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k(x-a)^k$$

est la **partie régulière** du DL ; le terme $o((x-a)^n)$ est le **reste**.

Unicité

S'il existe, le développement limité d'une fonction à un ordre donné et en un point donné est unique.

Changer le centre du DL

Un DL au voisinage de a se ramène toujours à un DL en 0 en posant

$$h = x - a.$$

On développe alors $f(a + h)$ lorsque $h \rightarrow 0$.

Parité et structure du DL

Si f est paire et possède un DL en 0, les coefficients des puissances impaires sont nuls. Si f est impaire, les coefficients des puissances paires sont nuls. Cela constitue un contrôle rapide très utile.

3. Formule de Taylor–Young**Taylor–Young en a**

Sous les hypothèses usuelles de dérivabilité jusqu'à l'ordre n au voisinage de a , on a, lorsque $h \rightarrow 0$,

$$f(a + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n).$$

Autrement dit,

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n).$$

Cette formule donne immédiatement le DL dès que les dérivées successives au point considéré sont faciles à calculer.

DL de e^x en 0 à l'ordre 4

Toutes les dérivées de e^x valent e^x , donc valent 1 en 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

DL de $\ln x$ au voisinage de 1

On pose $x = 1 + h$. Quand $x \rightarrow 1$, $h \rightarrow 0$, d'où

$$\ln x = \ln(1 + h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3).$$

Ainsi

$$\ln x = (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{3} + o((x - 1)^3).$$

4. Développements limités usuels en 0

Ces formules doivent être connues, au moins à quelques ordres, et surtout savoir être tronquées à l'ordre utile.

Catalogue fondamental

Lorsque $x \rightarrow 0$:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Pour le sinus et le cosinus, on conserve uniquement les puissances compatibles avec la parité :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5).$$

Piège classique

Dans un DL « à l'ordre n », on ne garde que les puissances de degré $\leq n$. Par exemple, à l'ordre 4 :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4),$$

et non pas nécessairement $o(x^3)$. Le reste doit être compatible avec l'ordre annoncé.

Quelques DL dérivés très utiles

À partir du catalogue et des opérations sur les DL :

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5),$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3),$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3).$$

5. Opérations sur les développements limités

Somme et différence

Si f et g possèdent des DL, on additionne ou soustrait leurs parties régulières, mais il faut les mettre au même ordre.

Piège classique

Avant d'additionner deux DL d'ordres différents, tronquer les deux au même ordre. Un DL à l'ordre 5 peut être tronqué à l'ordre 3, mais l'inverse est impossible sans information supplémentaire.

Produit

On multiplie les polynômes, puis on élimine tous les termes de degré supérieur à l'ordre demandé.

Exemple

À l'ordre 3 en 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Donc

$$e^x \cos x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^3),$$

d'où

$$e^x \cos x = 1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Inverse et quotient

Pour inverser $1 + u(x)$ avec $u(x) \rightarrow 0$, on utilise

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \dots$$

à l'ordre nécessaire. Un quotient se ramène ensuite à un produit par l'inverse.

Quotient : factoriser d'abord le premier terme non nul

Si numérateur et dénominateur tendent vers 0, repérer leur premier terme non nul :

$$N(x) = x^p(a_0 + a_1x + \dots), \quad D(x) = x^q(b_0 + b_1x + \dots),$$

avec $a_0b_0 \neq 0$. Alors

$$\frac{N(x)}{D(x)} = x^{p-q} \frac{a_0 + a_1x + \dots}{b_0 + b_1x + \dots}.$$

On inverse seulement le facteur dont le terme constant est non nul.

Composition

Pour calculer le DL de $F(u(x))$, on part du DL de $F(t)$ en $t = 0$ et on remplace t par $u(x)$, à condition que $u(x) \rightarrow 0$. Il faut ensuite développer et tronquer avec soin.

Exemple

Calculons $\ln(1 + \sin x)$ à l'ordre 3 en 0.

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3), \quad t = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Ainsi $t^2 = x^2 + o(x^3)$ et $t^3 = x^3 + o(x^3)$, donc

$$\ln(1 + \sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

6. Primitivation d'un développement limité**Primitivation terme à terme**

Supposons, au voisinage de 0,

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n),$$

et soit F une primitive de f suffisamment régulière. Alors

$$F(x) = F(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Cette méthode permet notamment de retrouver les DL de $\ln(1+x)$ à partir de $1/(1+x)$ ou de $\arctan x$ à partir de $1/(1+x^2)$.

Exemple

Comme

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4),$$

on obtient par primitivation, puisque $\arctan 0 = 0$,

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

7. Calcul de limites par DL**Stratégie en quatre étapes**

Pour une limite présentant une forme indéterminée :

1. identifier le point autour duquel développer ;
2. déterminer l'ordre minimal nécessaire en repérant les compensations probables ;
3. remplacer chaque fonction par son DL au même ordre et simplifier ;
4. factoriser le premier terme non nul, puis conclure.

Limite avec compensation d'ordre 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

Comme

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

on a

$$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

d'où

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}.}$$

Il faut aller assez loin

Pour

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3},$$

le simple équivalent $\sin x \sim x$ est inutile. Le DL donne

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

donc

$$\boxed{L = -\frac{1}{6}.}$$

Quotient de deux expressions qui s'annulent

Étudions

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{1 - \cos x}.$$

On a

$$\ln(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad 1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Par conséquent

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{1 - \cos x} = -1.}$$

8. Géométrie locale : tangente et position de la courbe

Si f est dérivable en a , sa tangente a pour équation

$$T(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Un DL d'ordre au moins 2 écrit

$$f(x) - T(x) = c_p(x - a)^p + o((x - a)^p),$$

où $p \geq 2$ est le premier indice dont le coefficient est non nul.

Lire la position relative

Au voisinage de a , le signe du premier terme non nul de $f(x) - T(x)$ détermine la position de la courbe par rapport à sa tangente.

- Si p est pair, le signe est le même des deux côtés de a : la courbe reste localement d'un même côté de la tangente.
- Si p est impair, le signe change lorsque $x - a$ change de signe : la courbe traverse sa tangente.

Exemple

Pour $f(x) = e^x$ en 0,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

La tangente est $y = 1 + x$, et

$$e^x - (1 + x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) > 0$$

pour x assez proche de 0, $x \neq 0$. La courbe est localement au-dessus de sa tangente.

9. Développements asymptotiques à l'infini

Pour étudier $x \rightarrow +\infty$, le changement

$$u = \frac{1}{x}$$

transforme le problème en un développement au voisinage de $u = 0^+$.

Méthode

Pour une expression contenant x sous une racine, un logarithme ou une fraction :

1. factoriser la puissance dominante de x ;
2. faire apparaître une fonction de $1/x$;
3. appliquer un DL usuel en 0 ;
4. revenir à x et interpréter les premiers termes.

Asymptote en $+\infty$

Pour

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x} \quad (x > 0),$$

on écrit

$$f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}.$$

Or

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2).$$

Avec $u = 1/x$:

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi

$$y = x + \frac{1}{2}$$

est une asymptote oblique en $+\infty$, et le terme $-1/(8x)$ précise la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

10. Équivalents usuels et usage correct

Les DL fournissent immédiatement de nombreux équivalents :

$$\sin x \sim x, \quad \tan x \sim x, \quad e^x - 1 \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad (\alpha \neq 0).$$

Quand un équivalent suffit-il ?

Un équivalent est idéal lorsqu'une expression se présente comme un **produit** ou un **quotient** de facteurs dont chacun possède un équivalent simple. En présence d'une somme ou d'une différence avec compensation, utiliser un DL au premier ordre non nul restant après simplification.

Piège classique

Deux réflexes à éviter :

- remplacer $\sin x$ par x dans $\sin x - x$;
- composer mécaniquement une équivalence, par exemple déduire $F(f(x)) \sim F(g(x))$ de $f(x) \sim g(x)$ sans hypothèse sur F .

Le symbole $\sim$ est une information sur un **quotient**, pas une égalité algébrique.

11. Choisir l'ordre juste

Le point le plus technique n'est souvent pas le calcul lui-même, mais le choix de l'ordre du DL.

Principe de l'ordre utile

Développer jusqu'au **premier terme qui ne s'annule pas après les compensations**. Pour un quotient, il faut connaître suffisamment de termes au numérateur et au dénominateur pour déterminer leurs premiers termes non nuls et, si nécessaire, le coefficient suivant.

Exemple

Pour calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3},$$

un DL à l'ordre 2 ne suffit pas, car tous ses termes s'annulent. À l'ordre 3 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

donc la limite vaut $1/6$.

12. Exercices corrigés

Exercice 1 — Limite avec logarithme

Calculer

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + x^2/2}{x^3}.$$

Correction. Le DL à l'ordre 3 donne

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Ainsi

$$\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

donc

$$L = \frac{1}{3}.$$

Exercice 2 — Composition

Déterminer le DL à l'ordre 4 de e^{x^2} en 0.

Correction. Avec $u = x^2$,

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

Comme $u^2 = x^4$,

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

Exercice 3 — Position par rapport à la tangente

Étudier la position de $y = \ln(1+x)$ par rapport à sa tangente en 0.

Correction. On a

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

La tangente est $y = x$ et

$$\ln(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) < 0$$

pour $x \neq 0$ suffisamment proche de 0. La courbe est donc localement **au-dessous** de sa tangente.

Exercice 4 — Développement à l'infini

Déterminer un équivalent de

$$\sqrt{x^2 + 3x + 1} - x$$

quand $x \rightarrow +\infty$.

Correction. On écrit

$$\sqrt{x^2 + 3x + 1} = x\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$

Avec $\sqrt{1+u} = 1 + u/2 + o(u)$,

$$\sqrt{x^2 + 3x + 1} = x + \frac{3}{2} + o(1),$$

donc

$$\boxed{\sqrt{x^2 + 3x + 1} - x \longrightarrow \frac{3}{2}}.$$

Ici la limite est non nulle ; un équivalent de la différence est donc simplement $3/2$.

À retenir avant un contrôle

1. Connaître les DL usuels en 0 et savoir les tronquer.
2. Ne jamais traiter $\sim$ comme le signe $=$, surtout dans une somme.
3. Mettre les DL au même ordre avant une somme ou un produit.
4. Pour un quotient, factoriser le premier terme non nul avant d'inverser.
5. Pour une composition, vérifier que la fonction intérieure tend vers le centre du DL extérieur.
6. Pour une limite, choisir l'ordre qui survit aux compensations.
7. À l'infini, penser au changement $u = 1/x$ et à la factorisation de la puissance dominante.