

Plaquette 4 – Images directes et images réciproques

Ensembles et applications — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Images directes et réciproques.

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \quad f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

- f^{-1} respecte toutes les opérations : $f^{-1}(B \cap C) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C)$, de même pour $\cup$ et le complémentaire.
- f respecte la réunion : $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$; pour l'intersection, seulement $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.
- Toujours : $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E) \subset B$.
- $f(A) \subset B \Leftrightarrow A \subset f^{-1}(B)$.
- Composition : $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$.

Correction de l'exercice 1 - Le carré sur des intervalles

- f décroît sur $[-2; 0]$ de 4 à 0, puis croît sur $[0; 1]$ de 0 à 1 ; elle est continue, donc prend toutes les valeurs entre son minimum et son maximum :

$$f([-2; 1]) = [0; 4]$$

- $f^{-1}([-1; 4]) = \{x \mid -1 \leq x^2 \leq 4\} = \{x \mid x^2 \leq 4\} = [-2; 2]$ (la condition $x^2 \geq -1$ est toujours vraie).
- $f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$: aucun réel n'a pour carré -1 . L'image réciproque existe, elle est simplement vide.

Réponse. $[0; 4]$; $[-2; 2]$; $\emptyset$.

Correction de l'exercice 2 - La fonction sinus

- Sur $[0; \pi]$, $\sin$ croît de 0 à 1 puis décroît jusqu'à 0 : $\sin([0; \pi]) = [0; 1]$.
- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$: $\sin^{-1}(\{0\}) = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- $\sin x \geq 0$ exactement sur les intervalles où le point du cercle trigonométrique est au-dessus de l'axe :

$$\sin^{-1}([0; 1]) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi; (2k+1)\pi]$$

- La notation $\sin^{-1}$ désigne ici une image réciproque, et non la fonction arcsin : $\sin$ n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$.

Réponse. $[0; 1]$; $\pi\mathbb{Z}$; $\bigcup_k [2k\pi; (2k+1)\pi]$.

Correction de l'exercice 3 - Exponentielle et logarithme

- $\exp$ est continue, strictement croissante, de limites 0 en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$: $\exp(\mathbb{R}) =]0; +\infty[$.
- Sur $] -\infty; 0]$, elle croît de 0 (non atteint) à $e^0 = 1$: $\exp(]-\infty; 0]) =]0; 1]$.
- $\ln x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$, et $x > 0$:

$$\ln^{-1}(]-\infty; 0]) =]0; 1]$$

- On retrouve le même ensemble : $\ln$ et $\exp$ sont des bijections réciproques, donc l'image réciproque par l'une est l'image directe par l'autre.

Réponse. $]0; +\infty[;]0; 1] ;]0; 1]$.

Correction de l'exercice 4 - Image d'une réunion

Pour $y \in F$, on traduit l'appartenance :

$$y \in f(A \cup A') \Leftrightarrow \exists x \in A \cup A', y = f(x)$$

- $\Leftrightarrow (\exists x \in A, y = f(x)) \text{ ou } (\exists x \in A', y = f(x))$, car « il existe » se distribue sur « ou » ;
- $\Leftrightarrow y \in f(A) \text{ ou } y \in f(A') \Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(A')$.
- Pour l'intersection, « il existe » ne se distribue pas sur « et » : on n'obtient qu'une inclusion (contre-exemple avec $x \mapsto x^2$, $A = \{1\}$, $A' = \{-1\}$).

Réponse. « Il existe » se distribue sur « ou ».

Correction de l'exercice 5 - Image réciproque d'une intersection

Pour $x \in E$:

$$x \in f^{-1}(B \cap C) \Leftrightarrow f(x) \in B \cap C \Leftrightarrow f(x) \in B \text{ et } f(x) \in C \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C)$$

- Même chaîne avec « ou » pour la réunion.
- Aucune hypothèse sur f n'est nécessaire : l'image réciproque ne fait qu'« interroger » $f(x)$, qui est unique pour chaque x .
- C'est pourquoi l'image réciproque est l'outil naturel de la topologie et des probabilités (événements $\{X \in B\}$).

Réponse. Chaîne d'équivalences, sans hypothèse sur f .

Correction de l'exercice 6 - Revenir en arrière

- Si $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$, donc $x \in f^{-1}(f(A))$.
- $f(A) = [0; 1]$ et $f^{-1}([0; 1]) = [-1; 1]$: l'inclusion est stricte, $[0; 1] \subsetneq [-1; 1]$.
- Soit $x \in f^{-1}(f(A))$: $f(x) \in f(A)$, donc $f(x) = f(a)$ pour un $a \in A$. Par injectivité, $x = a \in A$.

$$f \text{ injective} \Rightarrow f^{-1}(f(A)) = A$$

- En b), les points ajoutés ($-1 \leq x < 0$) sont ceux qui « partagent » une image avec un point de A .

Réponse. b) $[-1; 1]$ · c) injectivité : $f(x) = f(a) \Rightarrow x = a$.

Correction de l'exercice 7 - Image de l'image réciproque

- (C) Si $y = f(x)$ avec $f(x) \in B$, alors $y \in B$ et $y \in f(E)$.
- (D) Si $y \in B \cap f(E)$, alors $y = f(x)$ pour un $x \in E$, et $f(x) = y \in B$, donc $x \in f^{-1}(B)$ et $y \in f(f^{-1}(B))$.

$$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$$

- L'égalité avec B a lieu pour tout B si et seulement si $B \subset f(E)$ pour tout B , c'est-à-dire $f(E) = F$: f est **surjective**.
- Exemple : $f(x) = x^2$, $B = [-1; 4]$: $f(f^{-1}(B)) = [0; 4]$.

Réponse. $B \cap f(E)$; égalité pour tout $B \Leftrightarrow f$ surjective.

Correction de l'exercice 8 - La partie entière

- E ne prend que des valeurs entières et $E(n) = n$ pour $n \in \mathbb{Z}$: $E(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$.
- Sur $[0; 2,5]$, E prend les valeurs 0, 1, 2 : $E([0; 2,5]) = \{0, 1, 2\}$. L'image d'un intervalle n'est pas un intervalle, car E n'est pas continue.
- Par définition, $E(x) = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1$:

$$E^{-1}(\{2\}) = [2; 3[$$

- $E(x) \in [0; 1]$ signifie $E(x) = 0$ ou $E(x) = 1$: $E^{-1}([0; 1]) = [0; 1[\cup [1; 2[= [0; 2[$.

Réponse. $\mathbb{Z}$; $\{0, 1, 2\}$; $[2; 3[$; $[0; 2[$.

Correction de l'exercice 9 - Une application linéaire

- Pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t, 0) = t$: f est surjective, $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$.
- $f^{-1}(\{0\}) = \{(x, y) \mid x + 2y = 0\} = \{(-2y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$: c'est la droite passant par l'origine, dirigée par $(-2, 1)$.

$$f^{-1}(\{3\}) = \{(x, y) \mid x + 2y = 3\} = \{(3 - 2y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

- C'est la droite parallèle passant par $(3, 0)$.
- Les images réciproques des différents réels sont des droites parallèles qui « feuilletent » le plan.

Réponse. $\mathbb{R}$; droite $x + 2y = 0$; droite parallèle $x + 2y = 3$.

Correction de l'exercice 10 - Une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$

- $f(\{-2, -1, 0, 1, 2\}) = \{4, 1, 0, 1, 4\} = \{0, 1, 4\}$: 5 éléments au départ, 3 images (non-injectivité).
- $f^{-1}(\{4, 9\}) : n^2 = 4$ ou $n^2 = 9$:

$$f^{-1}(\{4, 9\}) = \{-3, -2, 2, 3\}$$

- $f^{-1}(\{2, 3\}) = \emptyset$: ni 2 ni 3 ne sont des carrés d'entiers.
- $f^{-1}(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$: tout carré est un entier naturel.

Réponse. $\{0, 1, 4\}$; $\{-3, -2, 2, 3\}$; $\emptyset$; $\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 11 - La fonction inverse

- Sur $]0; 1]$, f décroît de $+\infty$ à 1 : $f(]0; 1]) = [1; +\infty[$.
 - Sur $[-1; 0[$, f décroît de -1 à $-\infty$: l'image est $] - \infty; -1]$. Par réunion :
- $$f([-1; 0[\cup]0; 1]) =] - \infty; -1] \cup [1; +\infty[$$
- $\frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{2}$ (le signe de x doit être positif) : $f^{-1}([2; +\infty[) = \left]0; \frac{1}{2}\right]$.
 - On a utilisé $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$ pour traiter les deux morceaux séparément.

Réponse. $[1; +\infty[$; $] - \infty; -1]$; $[1; +\infty[$; $]0; \frac{1}{2}]$.

Correction de l'exercice 12 - Image contenue dans une partie

- $(\Rightarrow)$ Si $x \in A$, alors $f(x) \in f(A) \subset B$, donc $x \in f^{-1}(B)$.
- $(\Leftarrow)$ Si $y \in f(A)$, $y = f(x)$ avec $x \in A \subset f^{-1}(B)$, donc $y = f(x) \in B$.

$$f(A) \subset B \Leftrightarrow A \subset f^{-1}(B)$$

- Application : $f^{-1}([1; 5]) = \{x \mid 1 \leq x^2 + 1 \leq 5\} = \{x \mid x^2 \leq 4\} = [-2; 2]$, qui contient $[-1; 2]$. Donc $f([-1; 2]) \subset [1; 5]$.
- (En fait $f([-1; 2]) = [1; 5]$ exactement.)

Réponse. Double implication ; $[-1; 2] \subset f^{-1}([1; 5]) = [-2; 2]$.

Correction de l'exercice 13 - Image réciproque par une composée

Pour $x \in E$:

$$x \in (g \circ f)^{-1}(C) \Leftrightarrow g(f(x)) \in C \Leftrightarrow f(x) \in g^{-1}(C) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(g^{-1}(C))$$

- Application : $\ln(x^2) \leq 0$ avec $f(x) = x^2$ et $g = \ln$. On a $g^{-1}(]-\infty; 0]) =]0; 1]$, puis $f^{-1}(]0; 1]) = [-1; 0[\cup]0; 1]$.
- L'ensemble des solutions est $[-1; 0[\cup]0; 1]$: on « remonte » les fonctions une par une, en commençant par la dernière appliquée.

Réponse. $f^{-1}(g^{-1}(C))$; solutions $[-1; 0[\cup]0; 1]$.

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

- Faux** : $f(x) = x^2$, $A = \{-1, 1\}$, $A' = \{1\}$. Alors $f(A \setminus A') = f(\{-1\}) = \{1\}$, mais $f(A) \setminus f(A') = \{1\} \setminus \{1\} = \emptyset$.
- Vrai** : $f(x) \notin B \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B)$.
- Faux** : même exemple, $f(\{-1\}) = f(\{1\})$ avec $\{-1\} \neq \{1\}$. C'est vrai si f est injective.
- Vrai** : c'est la définition.

$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x) \Leftrightarrow F \subset f(E)$$

Réponse. a) faux · b) vrai · c) faux · d) vrai.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une fonction du second degré

- $f(x) = (x - 1)^2 - 1$.
- Sur $[0; 3]$: minimum -1 en 1 , maximum $f(3) = 3$ (et $f(0) = 0$) : $f([0; 3]) = [-1; 3]$. Sur $\mathbb{R}$: $f(\mathbb{R}) = [-1; +\infty[$.
- $-1 \leq (x - 1)^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow x \in [0; 2]$. Et $(x - 1)^2 - 1 > 3 \Leftrightarrow |x - 1| > 2 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$
- Non injective ($f(0) = f(2) = 0$), non surjective ($-2 \notin f(\mathbb{R})$). Elle est injective sur $I = [1; +\infty[$, où elle est strictement croissante.

Réponse. b) $[-1; 3]$, $[-1; +\infty[$ · c) $[0; 2]$; $]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$ · d) ni l'un ni l'autre ; $I = [1; +\infty[$.