

Plaquette 3 – Injections, surjections, bijections

Ensembles et applications – Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Injection, surjection, bijection.

f injective $\Leftrightarrow \forall x, x' \in E, (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$ f surjective $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$

- f bijective $\Leftrightarrow$ pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ a une unique solution, notée $f^{-1}(y)$.
- Composition : $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective ; $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.
- Si $g \circ f = \text{id}_E$, alors f est injective et g surjective.
- Pour E et F finis de même cardinal : f injective $\Leftrightarrow f$ surjective $\Leftrightarrow f$ bijective.
- Une fonction réelle continue strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I sur $f(I)$.

Correction de l'exercice 1 – Une application affine

Soit $y \in \mathbb{R}$. On résout $f(x) = y$:

$$3x - 5 = y \Leftrightarrow x = \frac{y+5}{3}$$

- Pour chaque y , l'équation a **exactement une** solution réelle : f est bijective.
- $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \frac{y+5}{3}$.
- Vérification : $f(f^{-1}(y)) = 3 \times \frac{y+5}{3} - 5 = y$.
- Plus généralement, $x \mapsto ax + b$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $a \neq 0$.

Réponse. $f^{-1}(y) = \frac{y+5}{3}$.

Correction de l'exercice 2 – Deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$

- g est **injective** : $n + 1 = n' + 1 \Rightarrow n = n'$. Elle n'est **pas surjective** : 0 n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{N}$.
- h n'est **pas injective** : $h(0) = h(1) = 0$. Elle est **surjective** : pour $m \in \mathbb{N}$,

$$h(2m) = \left\lfloor \frac{2m}{2} \right\rfloor = m$$

- Sur l'ensemble **infini** $\mathbb{N}$, une application peut être injective sans être surjective, ou l'inverse : c'est impossible pour une application d'un ensemble fini dans lui-même.

Réponse. g injective non surjective ; h surjective non injective.

Correction de l'exercice 3 – Une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1 ; 1[$

- Bien définie : $|f(x)| = \frac{|x|}{1+|x|} < 1$.
- Soit $y \in] -1 ; 1[$. On remarque que $f(x)$ a le signe de x , donc $|y| = \frac{|x|}{1+|x|}$, soit $|x| = \frac{|y|}{1-|y|}$. En remettant le signe :

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1 - |y|}$$

- Pour tout $y \in]-1; 1[$, il y a une unique solution : f est bijective et $f^{-1}(y) = \frac{y}{1 - |y|}$.
- Conséquence : $\mathbb{R}$ et un intervalle borné sont « de même taille ».

Réponse. $f^{-1}(y) = \frac{y}{1 - |y|}$.

Correction de l'exercice 4 - Une application du plan

Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. On résout le système $x + y = u$, $x - y = v$. En additionnant puis en soustrayant les deux équations :

$$x = \frac{u + v}{2} \quad y = \frac{u - v}{2}$$

- Le système a une unique solution pour tout (u, v) : f est bijective, et $f^{-1}(u, v) = \left(\frac{u + v}{2}, \frac{u - v}{2}\right)$.
- Vérification : $f(f^{-1}(u, v)) = \left(\frac{u + v}{2} + \frac{u - v}{2}, \frac{u + v}{2} - \frac{u - v}{2}\right) = (u, v)$.
- C'est une application **linéaire** ; sa bijectivité se lira aussi sur son déterminant $-2 \neq 0$.

Réponse. $f^{-1}(u, v) = \left(\frac{u + v}{2}, \frac{u - v}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 5 - Le carré dans $\mathbb{C}$

- Dans $\mathbb{C}$: **non injective**, car $1^2 = (-1)^2$. **Surjective** : tout complexe $w = re^{i\theta}$ a pour antécédent

$$z = \sqrt{r} e^{i\theta/2} \quad \text{car} \quad z^2 = r e^{i\theta} = w$$

- (et 0 a pour antécédent 0).
- Dans $\mathbb{R}$: non injective (1 et -1), et **non surjective** : -1 n'est le carré d'aucun réel.
- La même formule définit des applications aux propriétés différentes selon les ensembles.

Réponse. Dans $\mathbb{C}$: surjective non injective ; dans $\mathbb{R}$: ni l'un ni l'autre.

Correction de l'exercice 6 - Une composée bijective

- a) Pour tout n , $f(g(n)) = f(n + 1) = n$:

$$f \circ g = \text{id}_{\mathbb{N}}$$

- Mais $g(f(0)) = g(0) = 1 \neq 0$: $g \circ f \neq \text{id}_{\mathbb{N}}$.
- b) De $f \circ g = \text{id}$, on déduit que g est injective et f surjective.
- Ni l'une ni l'autre n'est bijective : g n'atteint pas 0, et $f(0) = f(1)$.
- Leçon : $f \circ g = \text{id}$ ne suffit pas pour que g soit la réciproque de f ; il faut aussi $g \circ f = \text{id}$.

Réponse. $f \circ g = \text{id}$, $g \circ f \neq \text{id}$; g injective, f surjective, aucune bijective.

Correction de l'exercice 7 - Les involutions

- $f \circ f = \text{id}_E$ est injective, donc f (appliquée en premier) est injective ; elle est surjective, donc f (appliquée en dernier) est surjective.
- f est bijective, et en composant $f \circ f = \text{id}$ par f^{-1} :

$$f^{-1} = f$$

- Exemples : $x \mapsto 1 - x$ sur $\mathbb{R}$ (car $1 - (1 - x) = x$) ; $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.
- Une telle application s'appelle une **involution** : la symétrie axiale en est un exemple géométrique.

Réponse. f bijective et $f^{-1} = f$; exemples : $1 - x$, $1/x$.

Correction de l'exercice 8 - Ensembles finis

Notons $n = \text{card}E$.

- Si f est injective, les images $f(x)$, pour $x \in E$, sont deux à deux distinctes : $f(E)$ contient n éléments.
- Or $f(E) \subset E$, et une partie de E ayant autant d'éléments que E est E lui-même :

$$\text{card}f(E) = \text{card}E \text{ et } f(E) \subset E \Rightarrow f(E) = E$$
- Donc f est surjective (et bijective).
- L'hypothèse « fini » est indispensable : $n \mapsto n + 1$ sur $\mathbb{N}$ est injective sans être surjective.

Réponse. $f(E)$ a n éléments et est inclus dans E , donc $f(E) = E$.

Correction de l'exercice 9 - Compter des applications

- a) Une application de E dans F : 5 choix pour l'image de a , 5 pour b , 5 pour c :
 $5^3 = 125$.
- Une injection : les trois images doivent être distinctes :
 $5 \times 4 \times 3 = 60$ injections
- b) Il y a $2^3 = 8$ applications de E dans G . Seules les deux applications constantes ne sont pas surjectives : $8 - 2 = 6$ surjections.
- Il n'y a aucune injection de E dans G ($3 > 2$: principe des tiroirs).

Réponse. a) 125 ; 60 · b) 6.

Correction de l'exercice 10 - Une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}^*$

- **Surjectivité** : soit $n \geq 1$. On divise n par 2 autant de fois que possible : $n = 2^a m$ avec m impair, donc $m = 2b + 1$ avec $b \in \mathbb{N}$. Alors $f(a, b) = n$.
- **Injectivité** : supposons $2^a(2b + 1) = 2^{a'}(2b' + 1)$ avec, par exemple, $a \geq a'$. En divisant par $2^{a'}$:

$$2^{a-a'}(2b + 1) = 2b' + 1$$

- Le membre de droite est impair, donc $a - a' = 0$; puis $2b + 1 = 2b' + 1$, et $b = b'$.
- Exemple : $f^{-1}(12) = (2, 1)$, car $12 = 2^2 \times 3$.

Réponse. $n = 2^a \times (\text{impair})$ de façon unique.

Correction de l'exercice 11 - Une réciproque explicite

Soit $y \geq 1$. On pose $t = e^x$; comme $x \geq 0$, on cherche $t \geq 1$. L'équation $\ln t = y$ devient

$$t + \frac{1}{t} = 2y \Leftrightarrow t^2 - 2yt + 1 = 0 \Leftrightarrow t = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

- Le produit des deux racines vaut 1 : l'une est ≥ 1 , l'autre ≤ 1 . Seule $t = y + \sqrt{y^2 - 1}$ convient (égalité des deux si $y = 1$).

- Pour chaque $y \geq 1$, il y a donc une unique solution $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \geq 0$: ch est bijective.
- Sa réciproque est $\operatorname{argch}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.

Réponse. $\operatorname{argch}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.

Correction de l'exercice 12 - Restreindre pour inverser

Forme canonique : $f(x) = (x - 2)^2 - 1$. La fonction est strictement croissante et continue sur $I = [2; +\infty[$, qui contient 5, et $f(I) = [-1; +\infty[= J$.

- Soit $y \geq -1$. Pour $x \geq 2$:

$$(x - 2)^2 - 1 = y \Leftrightarrow x - 2 = \sqrt{y + 1} \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{y + 1}$$

- (on garde la racine positive car $x - 2 \geq 0$).
- La réciproque est $y \mapsto 2 + \sqrt{y + 1}$, de $[-1; +\infty[$ dans $[2; +\infty[$.
- Contrôle : $f(5) = 8$ et $2 + \sqrt{9} = 5$.

Réponse. $I = [2; +\infty[$, $J = [-1; +\infty[$, $f^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y + 1}$.

Correction de l'exercice 13 - Inverse à gauche

- **f injective** : si $f(x) = f(x')$, on applique g :

$$x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'$$

- **g surjective** : soit $x \in E$; alors $x = g(f(x))$, donc x a pour antécédent $f(x)$ par g .
- On dit que g est un « inverse à gauche » de f . Si de plus $f \circ g = \operatorname{id}_F$, alors f et g sont bijectives, réciproques l'une de l'autre.
- L'exercice « une composée bijective » montre que la seconde égalité ne découle pas de la première.

Réponse. Appliquer g à $f(x) = f(x')$; $x = g(f(x))$ donne un antécédent.

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

- Faux** : dans l'exercice « une composée bijective », $f \circ g = \operatorname{id}$ est bijective sans que f ni g le soient. On sait seulement que l'application de droite est injective et celle de gauche surjective.
- Vrai** : si $x \neq x'$, par exemple $x < x'$, alors $f(x) < f(x')$, donc $f(x) \neq f(x')$.
- Faux** : $\arctan$ est strictement croissante, mais n'atteint pas 2 (ses valeurs sont dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$).
- Vrai** : si $z \in G$, on trouve y avec $g(y) = z$, puis x avec $f(x) = y$:

$$(g \circ f)(x) = g(y) = z$$

Réponse. a) faux · b) vrai · c) faux ($\arctan$) · d) vrai.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : $\mathbb{Z}$ est dénombrable

- $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 2$, $\varphi(-1) = 1$, $\varphi(2) = 4$, $\varphi(-2) = 3$: les positifs vont sur les pairs, les négatifs sur les impairs.
- Soit $m \in \mathbb{N}$. Si m est pair, la seule solution est $n = \frac{m}{2} \geq 0$ (un $n < 0$ donnerait un impair). Si m est impair, la seule solution est $n = -\frac{m+1}{2} < 0$. Donc φ est bijective et

$$\varphi^{-1}(m) = \begin{cases} \frac{m}{2} & \text{si } m \text{ est pair} \\ -\frac{m+1}{2} & \text{si } m \text{ est impair} \end{cases}$$

— On peut donc « numéroté » tous les entiers relatifs : $\mathbb{Z}$ est **dénombrable**, comme $\mathbb{N}$.

Réponse. a) 0, 2, 1, 4, 3 · b) pairs $\leftrightarrow$ positifs, impairs $\leftrightarrow$ négatifs.