

Plaquette 1 – Opérations sur les ensembles, injectivité, surjectivité et images

Ensembles et applications — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Opérations ensemblistes.

- $A \cup B, A \cap B, A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$, complémentaire $\bar{A}$.
- **De Morgan** : $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
- **Distributivité** : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- **Méthode reine** : pour prouver $E = F$, on montre $E \subset F$ **et** $F \subset E$; pour prouver $E \subset F$, on part de « soit $x \in E$ ».
- $P(E)$ est l'ensemble des parties de E ; si $|E| = n$, alors $|P(E)| = 2^n$.
- **Produit cartésien** : $E \times F = \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}$.

Applications. $f: E \rightarrow F$.

- **Injective** : $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ (chaque élément de F a **au plus** un antécédent).
- **Surjective** : $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$ (**au moins** un antécédent).
- **Bijective** : injective et surjective ; il existe alors f^{-1} avec $f^{-1} \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \text{id}_F$.
- **Composition** : si f et g sont injectives (resp. surjectives), $g \circ f$ l'est aussi. Si $g \circ f$ est injective, f l'est ; si $g \circ f$ est surjective, g l'est.

Images.

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \quad f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

- f^{-1} se comporte **parfaitement** : $f^{-1}(B \cap C) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C)$ et de même pour $\cup$.
- f ne préserve que l'inclusion pour $\cap$: $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, avec égalité si f est **injective**.

Relations d'équivalence : réflexive, symétrique, transitive. Les **classes** forment une **partition** de E .

Correction de l'exercice 1 - Double inclusion

Inclusion $\subset$. Soit $x \in A \setminus (B \cup C)$.

- Alors $x \in A$ et $x \notin B \cup C$, c'est-à-dire $x \notin B$ **et** $x \notin C$.
- Donc $x \in A \setminus B$ et $x \in A \setminus C$, soit x dans l'intersection.

Inclusion $\supset$. Soit $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

- Alors $x \in A$, $x \notin B$ et $x \notin C$, donc $x \notin B \cup C$.
- Donc $x \in A \setminus (B \cup C)$.
- **Conclusion** : les deux ensembles sont **égaux**.
- **Lecture logique** : c'est exactement la loi de **De Morgan**, $\text{non}(B \text{ ou } C) = \text{non}B \text{ et } \text{non}C$, relativisée à A .
- **Contrôle sur un exemple** : $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$ donnent $\{1\}$ des deux côtés ✓

Réponse. Double inclusion, via De Morgan.

Correction de l'exercice 2 - Injectivité

- f **n'est pas injective** : $f(-2) = f(2) = 4$ alors que $-2 \neq 2$.
- g **est injective** : soient $x, x' \geq 0$ avec $x^2 = x'^2$. Alors $(x - x')(x + x') = 0$.
- Si $x + x' = 0$ avec $x, x' \geq 0$, alors $x = x' = 0$; sinon $x = x'$. Dans tous les cas $x = x'$ ✓
- **Leçon** : l'injectivité dépend de l'**ensemble de départ**. Restreindre le domaine peut la rétablir.
- **Surjectivité** : ni f ni g n'est surjective sur $\mathbb{R}$ (les valeurs négatives ne sont pas atteintes).
- **Bijection** : $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x \mapsto x^2$ est **bijjective**, de réciproque $\sqrt{\cdot}$.

Réponse. f non injective ; g injective (restriction à $\mathbb{R}^+$).

Correction de l'exercice 3 - Surjectivité

- **Injective** : $2n = 2n'$ donne $n = n'$ ✓
- **Surjective ?** Non : 1 n'a pas d'antécédent, car $2n = 1$ n'a pas de solution entière.
- $\text{Im} f = 2\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers **pairs**.
- **Conclusion** : f est injective **non surjective**.
- **Fait remarquable** : $\mathbb{Z}$ est en bijection avec $2\mathbb{Z}$, une de ses parties **strictes** — impossible pour un ensemble **fini**.
- **Caractérisation du fini** : un ensemble est fini si et seulement si toute application injective de E dans E est **bijjective** (principe des tiroirs).

Réponse. Injective, non surjective ; $\text{Im} f = 2\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 4 - Bijection et réciproque

On résout $y = \frac{2x}{x-1}$ en x .

- $y(x-1) = 2x$, donc $x(y-2) = y$, soit $x = \frac{y}{y-2}$ (licite car $y \neq 2$).
- **Existence et unicité** de l'antécédent pour chaque $y \neq 2$: f est **bijjective**.
- **Réciproque** :

$$f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad y \mapsto \frac{y}{y-2}$$

- **Vérification** : $f^{-1}(f(x)) = \frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2x}{x-1} - 2} = \frac{2x}{2x - 2(x-1)} = \frac{2x}{2} = x$ ✓
- **Cohérence des ensembles** : f n'atteint jamais 2 (sinon $2x = 2x - 2$), et f^{-1} n'atteint jamais 1 ✓
- **Remarque** : f est une **homographie** ; sa réciproque est de la même forme, ce qui est général.

Réponse. $f^{-1}(y) = \frac{y}{y-2}$.

Correction de l'exercice 5 - Image directe et réciproque

- **Image directe** : sur $[-1; 2]$, x^2 prend toutes les valeurs entre son minimum 0 (en $x = 0$) et son maximum 4 (en $x = 2$).

$$f([-1; 2]) = [0; 4]$$

- **Attention** : ce **n'est pas** $[1; 4]$ — l'intervalle de départ contient 0.

— **Image réciproque** : $1 \leq x^2 \leq 4$ équivaut à $1 \leq |x| \leq 2$, donc

$$f^{-1}([1; 4]) = [-2; -1] \cup [1; 2]$$

— **Remarque** : l'image réciproque n'est **pas un intervalle** — elle peut être « éclatée ».

— **Contrôle** : $f(-1,5) = 2,25 \in [1; 4]$ ✓ et $f(0,5) = 0,25 \notin [1; 4]$ ✓

— **Piège fréquent** : confondre $f^{-1}(B)$ (qui existe toujours) avec l'application réciproque f^{-1} (qui exige la bijectivité).

Réponse. $[0; 4]$ et $[-2; -1] \cup [1; 2]$.

Correction de l'exercice 6 - Images et intersections

Inclusion. Soit $y \in f(A \cap B)$.

— Il existe $x \in A \cap B$ avec $y = f(x)$. Comme $x \in A$, $y \in f(A)$; comme $x \in B$, $y \in f(B)$.

— Donc $y \in f(A) \cap f(B)$ ✓

Contre-exemple à l'égalité. Prenons $f(x) = x^2$, $A = \{1\}$ et $B = \{-1\}$.

— $A \cap B = \emptyset$, donc $f(A \cap B) = \emptyset$.

— Mais $f(A) = f(B) = \{1\}$, donc $f(A) \cap f(B) = \{1\} \neq \emptyset$.

— **Cause** : deux éléments **distincts** ont la même image — c'est la non-injectivité.

— **Théorème** : l'égalité $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ pour tous A, B **caractérise** l'injectivité de f .

— **À l'inverse**, l'image réciproque commute avec **toutes** les opérations ensemblistes, sans hypothèse.

Réponse. Inclusion toujours vraie ; égalité $\Leftrightarrow f$ injective.

Correction de l'exercice 7 - Composition

Soient $x, x' \in E$ avec $f(x) = f(x')$.

— En appliquant g : $g(f(x)) = g(f(x'))$, soit $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$.

— $g \circ f$ étant **injective**, on en déduit $x = x'$.

— Donc f est **injective** ✓

— **g ne l'est pas nécessairement** : avec $E = \{a\}$, $F = \{1, 2\}$, $G = \{*\}$, $f(a) = 1$ et g constante, $g \circ f$ est injective (source à un élément) mais g ne l'est pas.

— **Résultat symétrique** : si $g \circ f$ est **surjective**, alors g est surjective (mais pas forcément f).

— **Mnémotechnique** : l'injectivité « remonte » vers la **première** application, la surjectivité « descend » vers la **dernière**.

Réponse. $f(x) = f(x') \Rightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \Rightarrow x = x'$.

Correction de l'exercice 8 - Parties d'un ensemble

On liste les parties par **cardinal croissant**.

— **Cardinal 0** : $\emptyset$ — 1 partie.

— **Cardinal 1** : $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ — 3 parties.

— **Cardinal 2** : $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ — 3 parties.

— **Cardinal 3** : $\{a, b, c\}$ — 1 partie.

— **Total** :

$$1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$$

— **Démonstration générale** : une partie se détermine par n **choix binaires** indépendants (chaque élément est dedans ou dehors), d'où 2^n .

- **Lien binomial** : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ — on retrouve ici la ligne 1, 3, 3, 1 du triangle de Pascal.

Réponse. Les $8 = 2^3$ parties, de $\emptyset$ à E .

Correction de l'exercice 9 - Produit cartésien

a) $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$: chaque élément de A est associé à chaque élément de B .

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}A \times \text{card}B = 2 \times 3 = 6$$

- b) On raisonne par équivalences sur un couple (x, z) :
- $(x, z) \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } z \in C$
- $\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } z \in C) \text{ ou } (x \in B \text{ et } z \in C) \Leftrightarrow (x, z) \in (A \times C) \cup (B \times C)$.
- On a utilisé la distributivité de « et » sur « ou » : une chaîne d'équivalences donne les deux inclusions à la fois.

Réponse. a) 6 couples · b) distributivité de « et » sur « ou ».

Correction de l'exercice 10 - Image réciproque d'un complémentaire

Pour $x \in E$, on traduit l'appartenance :

$$x \in f^{-1}(F \setminus B) \Leftrightarrow f(x) \notin B \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in E \setminus f^{-1}(B)$$

- L'image réciproque « respecte » le complémentaire, sans aucune hypothèse sur f .
- Pour l'image directe, c'est **faux** en général. Contre-exemple : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, $A = [0; +\infty[$. Alors $f(\mathbb{R} \setminus A) = f(\emptyset) = \emptyset$, alors que $\mathbb{R} \setminus f(A) = \mathbb{R} \setminus [0; +\infty[=]-\infty; 0[$.
- L'égalité exige que f soit **bijjective**.

Réponse. Vrai pour f^{-1} (chaîne d'équivalences) ; faux pour l'image directe en général.

Correction de l'exercice 11 - Réciproque d'une composée

- a) f est bijective, de réciproque $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$; g est bijective (strictement croissante, continue, de limites $\pm\infty$), de réciproque $g^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$. Une composée de bijections est bijective.
- b) Directement : $y = (2x+1)^3 \Leftrightarrow 2x+1 = \sqrt[3]{y} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt[3]{y}-1}{2}$.
- Par la formule du cours (on « défait » d'abord la dernière opération effectuée) :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}: y \mapsto \frac{\sqrt[3]{y}-1}{2}$$

- Les deux méthodes concordent. L'ordre est inversé, comme pour enlever des chaussettes et des chaussures.

Réponse. $(g \circ f)^{-1}(y) = \frac{\sqrt[3]{y}-1}{2}$.

Correction de l'exercice 12 - Relation d'équivalence

- **Réflexivité** : $x - x = 0 = 3 \times 0$ ✓
- **Symétrie** : si $x - y = 3k$, alors $y - x = 3(-k)$ ✓
- **Transitivité** : si $x - y = 3k$ et $y - z = 3k'$, alors $x - z = 3(k + k')$ ✓
- C'est donc une **relation d'équivalence**, la **congruence modulo 3**.
- **Classes** : il y en a **trois**, selon le reste de la division par 3 :

- $\overline{0} = \{\dots, -3, 0, 3, 6, \dots\}$; $\overline{1} = \{\dots, -2, 1, 4, 7, \dots\}$; $\overline{2} = \{\dots, -1, 2, 5, 8, \dots\}$.
- **Partition** : ces trois classes sont **disjointes** et leur réunion est $\mathbb{Z}$ ✓ — c'est la propriété fondamentale des classes d'équivalence.
- **Ensemble quotient** : $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \langle \overline{0}, \overline{1}, \overline{2} \rangle$, qui hérite d'une structure d'anneau (et même de corps, 3 étant premier).

Réponse. Congruence modulo 3 : trois classes formant une partition de $\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 13 - Cardinal d'une réunion

- **Formule du crible** : $|A \cup E| = |A| + |E| - |A \cap E|$.

$$|A \cup E| = 18 + 15 - 8 = 25$$
- **Complémentaire** : $30 - 25 = 5$ étudiants ne font **aucune** des deux langues.
- **Détail de la répartition** : anglais seulement $18 - 8 = 10$; espagnol seulement $15 - 8 = 7$; les deux 8 ; aucune 5.
- **Contrôle** : $10 + 7 + 8 + 5 = 30$ ✓
- **Piège** : additionner $18 + 15 = 33 > 30$ compte **deux fois** les bilingues — d'où la soustraction de l'intersection.
- **Généralisation à trois ensembles** : $|A \cup B \cup C| = \sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + |A \cap B \cap C|$.

Réponse. 5 étudiants.

Correction de l'exercice 14 - Applications entre ensembles finis

- **Applications** : chaque élément de E a 4 images possibles, indépendamment : $4^3 = 64$.
- **Injections** : les images doivent être distinctes, soit un arrangement : $4 \times 3 \times 2 = 24$.
- **Bijections** : il en faudrait entre ensembles de **même cardinal** — ici $3 \neq 4$, donc **aucune**.
- **Contrôle** : $24 \leq 64$ ✓, et la proportion d'injections est $\frac{24}{64} = 37,5$ %.
- **Surjections** : par le crible, $4^3 - \binom{4}{1}3^3 + \binom{4}{2}2^3 - \binom{4}{3}1^3 = 64 - 108 + 48 - 4 = 0$ — **aucune**, ce qui est normal puisque $|E| < |F|$.
- **Principe des tiroirs** : si $|E| > |F|$, aucune application n'est injective ; si $|E| < |F|$, aucune n'est surjective.

Réponse. 64 applications, 24 injections, aucune bijection.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : famille de parties

Inclusion toujours vraie : $f(f^{-1}(B)) \subset B$, car tout élément de $f^{-1}(B)$ a son image dans B .

Sens $\Rightarrow$. Supposons f surjective et soit $y \in B$.

- Il existe $x \in E$ avec $f(x) = y$; alors $x \in f^{-1}(B)$, donc $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$.
- D'où l'égalité.

Sens $\Leftarrow$. Supposons l'égalité vraie pour toute partie B .

- Prenons $B = \{y\}$ pour $y \in F$ quelconque. Alors $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\} \neq \emptyset$.
- Donc $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$: y admet un **antécédent**.
- Ceci valant pour tout y , f est **surjective** ✓
- **Résultat dual** : f est **injective** si et seulement si $f^{-1}(f(A)) = A$ pour toute partie A de E .

— **Contre-exemple** pour $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R} : f^{-1}(f(\{1\})) = \{-1, 1\} \neq \{1\}$ ✓

Réponse. Surjectivité $\Leftrightarrow f(f^{-1}(B)) = B$ pour tout B (tester $B = \{y\}$).