

Plaquette 5 – Relations d'équivalence et relations d'ordre

Ensembles et applications — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Relations binaires sur E .

- Réflexive : $\forall x, xRx$. Symétrique : $xRy \Rightarrow yRx$. Antisymétrique : $(xRy \text{ et } yRx) \Rightarrow x = y$. Transitive : $(xRy \text{ et } yRz) \Rightarrow xRz$.
- Équivalence = réflexive, symétrique, transitive. Classe de x :

$$\bar{x} = \{y \in E \mid xRy\}$$

- Les classes sont non vides, deux à deux disjointes ou égales, et leur réunion est E : elles forment une **partition**.
- Ordre = réflexive, antisymétrique, transitive ; **total** si deux éléments sont toujours comparables.
- Exemple type : $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n \mid a - b$, relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ à n classes.

Correction de l'exercice 1 – Congruence modulo 5

- Réflexive : $a - a = 0 = 5 \times 0$.
- Symétrique : si $a - b = 5k$, alors $b - a = 5(-k)$.
- Transitive : si $a - b = 5k$ et $b - c = 5l$, alors

$$a - c = (a - b) + (b - c) = 5(k + l)$$
- Classes : aRb si et seulement si a et b ont le même reste dans la division par 5. Il y a 5 classes : $\bar{0} = 5\mathbb{Z}$, $\bar{1} = 1 + 5\mathbb{Z}$, ..., $\bar{4} = 4 + 5\mathbb{Z}$.
- Par exemple, $\bar{2} = \{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$.

Réponse. Équivalence ; 5 classes, selon le reste modulo 5.

Correction de l'exercice 2 – Différence entière

- Réflexive : $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$. Symétrique : $y - x = -(x - y) \in \mathbb{Z}$. Transitive : $x - z = (x - y) + (y - z)$ est une somme d'entiers.
- Classe de x : $\bar{x} = x + \mathbb{Z} = \{x + k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- Existence : $x - E(x) \in [0 ; 1[$ et $x - (x - E(x)) = E(x) \in \mathbb{Z}$.
- Unicité : si $t, t' \in [0 ; 1[$ sont dans la même classe, $t - t' \in \mathbb{Z} \cap] - 1 ; 1[= \{0\}$.

$$\bar{x} \cap [0 ; 1[= \{x - E(x)\}$$

- $x - E(x)$ est la « partie fractionnaire » de x : les classes correspondent aux points d'un cercle.

Réponse. Classes $x + \mathbb{Z}$; représentant unique $x - E(x) \in [0 ; 1[$.

Correction de l'exercice 3 – Même distance à l'origine

On remarque que $(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow N(x, y) = N(x', y')$, avec $N(x, y) = x^2 + y^2$. Une relation de la forme « même valeur de N » est toujours une équivalence, car l'égalité est réflexive, symétrique et transitive.

- Classe de (x_0, y_0) , avec $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$:

$$\overline{(x_0, y_0)} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$$

- C'est le **cercle** de centre O et de rayon r si $r > 0$, et le singleton $\{(0, 0)\}$ si $r = 0$.
- Les classes (cercles concentriques et le centre) partitionnent bien le plan.

Réponse. Classes : les cercles de centre O , et $\{O\}$.

Correction de l'exercice 4 - La relation « même image »

- Réflexivité, symétrie et transitivité découlent de celles de l'égalité dans F .
- La classe de x est l'ensemble des points qui ont la même image que x :

$$\bar{x} = f^{-1}(\{f(x)\})$$

- Exemple : $\bar{x} = \{x, -x\}$ (deux éléments si $x \neq 0$, un seul si $x = 0$).
- f est injective si et seulement si toutes les classes sont des singletons.
- On peut « factoriser » f : à chaque classe correspond exactement une valeur de $f(E)$.

Réponse. Classes $f^{-1}(\{f(x)\})$; pour x^2 : $\{x, -x\}$.

Correction de l'exercice 5 - Construire les rationnels

- Réflexive : $ab = ba$. Symétrique : $ad = bc \Rightarrow cb = da$.
- Transitive : si $ad = bc$ et $cf = de$, on multiplie la première par f :

$$adf = bcf = bde \Rightarrow d(af - be) = 0 \Rightarrow af = be$$
- car $d \neq 0$: c'est là que sert l'hypothèse « second terme non nul ».
- Classe de $(1, 2)$: les (c, d) avec $d = 2c$, soit $\{(1, 2), (2, 4), (-3, -6), \dots\}$: toutes les écritures de la fraction $\frac{1}{2}$.
- Un rationnel **est** une classe d'équivalence : c'est la construction de $\mathbb{Q}$ à partir de $\mathbb{Z}$.

Réponse. Transitivité grâce à $d \neq 0$; classe de $(1, 2)$: les $(c, 2c)$, $c \neq 0$.

Correction de l'exercice 6 - Presque égaux

- Réflexive : $|x - x| = 0 \leq 1$. Symétrique : $|y - x| = |x - y|$.
- **Pas transitive** : $0R1$ et $1R2$, mais

$$|0 - 2| = 2 > 1$$
- donc 0 n'est pas en relation avec 2 . Ce n'est pas une relation d'équivalence.
- Intuition : « être proche » ne se transmet pas le long d'une chaîne ; une suite de petits pas finit par faire un grand écart.

Réponse. Non : $0R1$, $1R2$, mais pas $0R2$.

Correction de l'exercice 7 - La divisibilité sur $\mathbb{N}^*$

- Réflexive : $a = 1 \times a$, donc $a \mid a$.
- Antisymétrique : si $a \mid b$ et $b \mid a$, alors $b = ka$ et $a = lb$ avec $k, l \in \mathbb{N}^*$, donc $a = lka$, soit $lk = 1$: $k = l = 1$ et $a = b$.
- Transitive : si $b = ka$ et $c = lb$, alors

$$c = (lk)a \Rightarrow a \mid c$$
- **Ordre partiel** : 2 et 3 ne sont pas comparables ($2 \nmid 3$ et $3 \nmid 2$).
- 1 est le plus petit élément (il divise tout) ; il n'y a pas de plus grand élément.

Réponse. Ordre partiel (2 et 3 incomparables).

Correction de l'exercice 8 - La divisibilité sur $\mathbb{Z}$

- Elle est réflexive et transitive (même preuve que sur $\mathbb{N}^*$).
- Elle n'est **pas antisymétrique** : $2 \mid -2$ et $-2 \mid 2$, mais $2 \neq -2$.

$$-2 = (-1) \times 2 \quad 2 = (-1) \times (-2)$$
- Ce n'est donc pas une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$ (on parle de « préordre »).
- Sur $\mathbb{N}^*$, l'antisymétrie marchait parce que $lk = 1$ imposait $k = l = 1$; dans $\mathbb{Z}$, on peut aussi avoir $k = l = -1$.

Réponse. Non : $2 \mid -2$ et $-2 \mid 2$ avec $2 \neq -2$.

Correction de l'exercice 9 - L'ordre produit

- Réflexive : $x \leq x$ et $y \leq y$.
- Antisymétrique : si $x \leq x'$, $x' \leq x$, $y \leq y'$, $y' \leq y$, alors $x = x'$ et $y = y'$.
- Transitive : composante par composante, par transitivité de $\leq$.
- **Non total** : $(1, 0)$ et $(0, 1)$ ne sont pas comparables, car

$$1 > 0 \quad \text{mais} \quad 0 < 1$$
- Géométriquement, (x', y') majore (x, y) s'il est dans le quart de plan « en haut à droite » de (x, y) .

Réponse. Ordre partiel : $(1, 0)$ et $(0, 1)$ incomparables.

Correction de l'exercice 10 - L'ordre lexicographique

C'est l'ordre du dictionnaire : on compare d'abord la première composante, puis la seconde en cas d'égalité.

- Réflexivité : $x = x$ et $y \leq y$. Antisymétrie : si $(x, y) \leq_{\text{lex}} (x', y')$ et $(x', y') \leq_{\text{lex}} (x, y)$, on ne peut avoir $x < x'$ ni $x' < x$, donc $x = x'$, puis $y \leq y'$ et $y' \leq y$.
- Transitivité : en distinguant les cas selon que les premières composantes sont égales ou non.
- **Total** : deux couples sont toujours comparables, car $\leq$ est total sur $\mathbb{R}$:

$$x < x' \text{ ou } x' < x \text{ ou } (x = x' \text{ et } (y \leq y' \text{ ou } y' \leq y))$$
- Exemple : $(1, 5) \leq_{\text{lex}} (2, 0)$, et $(1, 0) \leq_{\text{lex}} (1, 3)$.

Réponse. Ordre total (ordre du dictionnaire).

Correction de l'exercice 11 - L'inclusion

- Réflexive : $A \subset A$. Antisymétrique : $A \subset B$ et $B \subset A$ donnent $A = B$ (double inclusion).
Transitive : $A \subset B \subset C \Rightarrow A \subset C$.
- **Non total** : $\{1\}$ et $\{2\}$ ne sont pas comparables.
- Plus petit élément : $\emptyset$, contenu dans toute partie. Plus grand élément : E .

$$\forall A \in P(E), \emptyset \subset A \subset E$$
- Deux parties A et B ont toujours un plus petit majorant, $A \cup B$, et un plus grand minorant, $A \cap B$.

Réponse. Ordre partiel ; minimum $\emptyset$, maximum E .

Correction de l'exercice 12 - Minimaux et maximaux

- a) 2 et 3 ne sont divisés par aucun autre élément de A : ils sont **minimaux**. 4 et 6 ne divisent aucun autre élément de A : ils sont **maximaux**.
- b) Pas de plus petit élément : il devrait diviser 2 et 3, donc valoir $1 \notin A$. Pas de plus grand : il devrait être multiple de 4 et de 6 dans A , ce qui n'existe pas.
- c) Un majorant est un multiple commun à 2, 3, 4, 6 ; le plus petit est leur PPCM :
- $$\text{ppcm}(2, 3, 4, 6) = 12$$

— Dans un ordre partiel, « minimal » et « plus petit » sont des notions différentes.

Réponse. a) minimaux 2, 3 ; maximaux 4, 6 · b) non · c) 12.

Correction de l'exercice 13 - D'une partition à une relation

- a) Chaque élément est dans une unique partie : il est dans la même partie que lui-même (réflexive) ; la symétrie est immédiate ; si x, y sont dans la même partie et y, z aussi, c'est la partie de y , donc x et z sont ensemble (transitive).
- b) On remarque $4 - 1 = 5 - 2 = 6 - 3 = 3$:

$$xRy \Leftrightarrow 3 \mid x - y$$

- C'est la congruence modulo 3, restreinte à E .
- Toute partition définit ainsi une relation d'équivalence, dont elle est l'ensemble des classes, et réciproquement.

Réponse. b) $xRy \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{3}$.

Correction de l'exercice 14 - Symétrique et transitive sans être réflexive

L'argument suppose qu'il existe un y tel que xRy . Or rien ne le garantit : si x n'est en relation avec **aucun** élément, on ne peut rien en déduire.

- Contre-exemple : sur $E = \{1, 2\}$, la relation dont le seul couple est $(1, 1)$.
- Elle est symétrique et transitive (on le vérifie sur l'unique couple), mais pas réflexive, car

$$(2, 2) \notin R$$

- La réflexivité n'est donc pas une conséquence des deux autres propriétés : il faut toujours la vérifier.

Réponse. Il peut n'exister aucun y lié à x ; contre-exemple $\{(1, 1)\}$ sur $\{1, 2\}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : le signe du produit

- a) Réflexive : $x^2 > 0$ pour $x \neq 0$. Symétrique : $yx = xy$. Transitive : si $xy > 0$ et $yz > 0$, alors

$$xz = \frac{(xy)(yz)}{y^2} > 0$$

- b) xRy si et seulement si x et y ont le même signe : deux classes, $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
- c) Non : $0 \times 0 = 0$, donc 0 n'est pas en relation avec lui-même ; la réflexivité échoue.
- Le choix de l'ensemble de départ fait partie de la définition de la relation.

Réponse. a) oui · b) $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ · c) non (pas réflexive en 0).