

Plaquette 4 – Images directes et images réciproques

Ensembles et applications — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

L'**image directe** $f(A)$ rassemble les valeurs prises par f sur A : pour une fonction réelle, on l'obtient avec les variations (et la continuité, qui garantit que toutes les valeurs intermédiaires sont atteintes). L'**image réciproque** $f^{-1}(B)$ rassemble les points **dont l'image est dans B** : on la calcule en résolvant l'équation ou l'inéquation $f(x) \in B$. Elle existe pour toute application, même non bijective. Pour les propriétés générales, on traduit l'appartenance : $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, y = f(x)$ et $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.

Exercice 1 – Le carré sur des intervalles

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Déterminer $f([-2; 1])$, $f^{-1}([-1; 4])$ et $f^{-1}(\{-1\})$.

Exercice 2 – La fonction sinus

Déterminer $\sin([0; \pi])$, $\sin^{-1}(\{0\})$ et $\sin^{-1}([0; 1])$ (images réciproques par la fonction $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$).

Exercice 3 – Exponentielle et logarithme

Déterminer $\exp(\mathbb{R})$, $\exp(]-\infty; 0])$ et l'image réciproque de $] -\infty; 0]$ par $\ln:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

Exercice 4 – Image d'une réunion

Soit $f: E \rightarrow F$ et $A, A' \subset E$. Démontrer que $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.

Exercice 5 – Image réciproque d'une intersection

Soit $f: E \rightarrow F$ et $B, C \subset F$. Démontrer que $f^{-1}(B \cap C) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C)$ et $f^{-1}(B \cup C) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C)$.

Exercice 6 – Revenir en arrière

- Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$ pour toute partie A de E .
- Avec $f(x) = x^2$ et $A = [0; 1]$, calculer $f^{-1}(f(A))$.
- Montrer que si f est injective, l'égalité a lieu.

Exercice 7 – Image de l'image réciproque

Soit $f: E \rightarrow F$ et $B \subset F$. Montrer que $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$. En déduire une condition pour avoir $f(f^{-1}(B)) = B$ pour toute partie B .

Exercice 8 - La partie entière

On note $E(x)$ la partie entière de x . Déterminer $E(\mathbb{R})$, $E([0; 2,5])$, $E^{-1}(\{2\})$ et $E^{-1}([0; 1])$.

Exercice 9 - Une application linéaire

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + 2y$. Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$, $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{3\})$. Interpréter géométriquement.

Exercice 10 - Une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$

Soit $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $n \mapsto n^2$. Déterminer $f(\{-2, -1, 0, 1, 2\})$, $f^{-1}(\{4, 9\})$, $f^{-1}(\{2, 3\})$ et $f^{-1}(\mathbb{N})$.

Exercice 11 - La fonction inverse

Soit $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$. Déterminer $f([0; 1])$, $f([-1; 0[\cup]0; 1])$ et $f^{-1}([2; +\infty[)$.

Exercice 12 - Image contenue dans une partie

Soit $f: E \rightarrow F$, $A \subset E$ et $B \subset F$. Montrer que $f(A) \subset B \Leftrightarrow A \subset f^{-1}(B)$. Application : montrer que la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ envoie $[-1; 2]$ dans $[1; 5]$.

Exercice 13 - Image réciproque par une composée

Soient $f: E \rightarrow F$, $g: F \rightarrow G$ et $C \subset G$. Montrer que $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$. Application : résoudre $\ln(x^2) \leq 0$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 14 - Vrai ou faux ?

Pour $f: E \rightarrow F$ quelconque, $A, A' \subset E$, $B \subset F$:

- $f(A \setminus A') = f(A) \setminus f(A')$.
- $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$.
- Si $f(A) = f(A')$, alors $A = A'$.
- $f(E) = F$ si et seulement si f est surjective.

Exercice 15 - Synthèse : une fonction du second degré

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 2x$.

- Écrire f sous forme canonique.
- Déterminer $f([0; 3])$ et $f(\mathbb{R})$.
- Déterminer $f^{-1}([-1; 0])$ et $f^{-1}([3; +\infty[)$.
- f est-elle injective ? surjective ? Donner la plus grande partie I contenant 2 sur laquelle elle est injective.