

Plaquette 3 – Injections, surjections, bijections

Ensembles et applications — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Pour étudier $f:E \rightarrow F$, on résout l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in E$, pour un $y \in F$ quelconque : si elle a **au plus** une solution pour tout y , f est injective ; **au moins** une, surjective ; **exactement** une, bijective, et l'expression de cette solution donne $f^{-1}(y)$. Pour réfuter, un contre-exemple suffit : deux points de même image (non injective), ou un y sans antécédent (non surjective). Les ensembles de départ et d'arrivée font partie de l'application : les changer peut changer la réponse.

Exercice 1 – Une application affine

Montrer que $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x - 5$ est bijective et déterminer f^{-1} .

Exercice 2 – Deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$

Étudier l'injectivité et la surjectivité de $g:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto n + 1$, et de $h:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ (partie entière).

Exercice 3 – Une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1 ; 1[$

Montrer que $f:\mathbb{R} \rightarrow] -1 ; 1[$, $x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$ est bien définie, bijective, et calculer f^{-1} .

Exercice 4 – Une application du plan

Montrer que $f:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 5 – Le carré dans $\mathbb{C}$

L'application $z \mapsto z^2$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est-elle injective ? surjective ? Même question pour $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6 – Une composée bijective

Soient $g:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto n + 1$ et $f:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(n) = n - 1$ si $n \geq 1$.

- Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.
- Qu'en déduire sur f et g ?

Exercice 7 – Les involutions

Une application $f:E \rightarrow E$ vérifie $f \circ f = \text{id}_E$. Montrer que f est bijective et préciser f^{-1} . Donner deux exemples sur des parties de $\mathbb{R}$.

Exercice 8 – Ensembles finis

Soit E un ensemble fini et $f:E \rightarrow E$. Montrer que si f est injective, alors f est surjective.

Exercice 9 – Compter des applications

Soient $E = \{a, b, c\}$, F à 5 éléments et $G = \{0, 1\}$.

- a) Combien y a-t-il d'applications de E dans F ? d'injections ?
- b) Combien y a-t-il de surjections de E dans G ?

Exercice 10 – Une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}^*$

Montrer que $f:\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^*$, $(a, b) \mapsto 2^a(2b + 1)$ est bijective.

Exercice 11 – Une réciproque explicite

Montrer que $\text{ch}:[0; +\infty[\rightarrow [1; +\infty[$, $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 12 – Restreindre pour inverser

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Trouver un intervalle I contenant 5 et un ensemble J tels que f induise une bijection de I sur J , puis calculer la réciproque.

Exercice 13 – Inverse à gauche

Soient $f:E \rightarrow F$ et $g:F \rightarrow E$ telles que $g \circ f = \text{id}_E$. Montrer que f est injective et g surjective.

Exercice 14 – Vrai ou faux ?

Justifier chaque réponse.

- a) Si $g \circ f$ est bijective, alors f et g sont bijectives.
- b) Une application strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est injective.
- c) Une application strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est surjective.
- d) La composée de deux surjections est une surjection.

Exercice 15 – Synthèse : $\mathbb{Z}$ est dénombrable

On définit $\varphi:\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ par $\varphi(n) = 2n$ si $n \geq 0$ et $\varphi(n) = -2n - 1$ si $n < 0$.

- a) Calculer $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(-1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(-2)$.
- b) Montrer que φ est bijective et écrire φ^{-1} .