

**Plaquette 1 - Opérations sur les ensembles,
injectivité, surjectivité et images**
Ensembles et applications — Licence 1 (L1)
Exercices

Méthode

On démontre une égalité d'ensembles par **double inclusion**, on établit injectivité et surjectivité par la **définition**, on calcule **images directes** et **réciroques**, et on manipule les relations d'équivalence.

Exercice 1 - Double inclusion

Démontrer que $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Exercice 2 - Injectivité

L'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, est-elle injective ? Et $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$?

Exercice 3 - Surjectivité

L'application $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto 2n$, est-elle injective ? surjective ?

Exercice 4 - Bijection et réciproque

Montrer que $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}, x \mapsto \frac{2x}{x-1}$, est bijective et calculer f^{-1} .

Exercice 5 - Image directe et réciproque

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Calculer $f([-1; 2])$ et $f^{-1}([1; 4])$.

Exercice 6 - Images et intersections

Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, et donner un contre-exemple à l'égalité.

Exercice 7 - Composition

Soient $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Exercice 8 - Parties d'un ensemble

Déterminer $P(E)$ pour $E = \{a, b, c\}$ et vérifier son cardinal.

Exercice 9 - Produit cartésien

Soient $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ et C un ensemble quelconque.

- a) Écrire $A \times B$ et donner son cardinal.
- b) Démontrer que $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

Exercice 10 - Image réciproque d'un complémentaire

Soit $f: E \rightarrow F$ et $B \subset F$. Démontrer que $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$. L'égalité analogue pour l'image directe, $f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$, est-elle vraie ?

Exercice 11 - Réciproque d'une composée

Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$.

- a) Justifier que f , g et $g \circ f$ sont bijectives.
- b) Calculer $(g \circ f)^{-1}$ de deux façons.

Exercice 12 - Relation d'équivalence

Sur $\mathbb{Z}$, on définit xRy si $x - y$ est un multiple de 3. Montrer que c'est une relation d'équivalence et décrire les classes.

Exercice 13 - Cardinal d'une réunion

Dans une classe de 30 étudiants, 18 font de l'anglais, 15 de l'espagnol et 8 les deux. Combien n'en font aucune ?

Exercice 14 - Applications entre ensembles finis

Soient E à 3 éléments et F à 4 éléments. Combien d'applications de E dans F ? Combien d'injections ? De bijections ?

Exercice 15 - Synthèse : famille de parties

Soit $f: E \rightarrow F$. Montrer que f est surjective si et seulement si $f(f^{-1}(B)) = B$ pour toute partie B de F .