

Plaqueette 2 - Opérations ensemblistes, différence symétrique et indicatrices

Ensembles et applications — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Pour démontrer une égalité d'ensembles, on procède par **double inclusion** (« soit $x \in E$... donc $x \in F$ », puis l'inverse) ou par une **chaîne d'équivalences** sur « $x \in E$ », qui traduit l'égalité en une équivalence logique (et, ou, non). Pour réfuter une égalité, un **contre-exemple** sur de petits ensembles suffit. Les **fonctions indicatrices** transforment les opérations ensemblistes en calculs sur des 0 et des 1 : c'est souvent le moyen le plus rapide de vérifier une identité.

Exercice 1 - Loi de De Morgan

Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Démontrer par double inclusion que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Exercice 2 - Distributivité de la réunion

Démontrer que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ par une chaîne d'équivalences.

Exercice 3 - Réunion égale à l'intersection

Montrer que $A \cup B = A \cap B$ si et seulement si $A = B$.

Exercice 4 - Trois façons de dire $A \subset B$

Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes : (i) $A \subset B$; (ii) $A \cup B = B$; (iii) $A \cap B = A$.

Exercice 5 - La différence symétrique

On pose $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

- a) Calculer $A \Delta B$ pour $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{3, 4, 5\}$.
- b) Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Exercice 6 - Propriétés de la différence symétrique

Montrer que $A \Delta \emptyset = A$, que $A \Delta A = \emptyset$, et que $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$.

Exercice 7 - Indicatrices de base

Démontrer que $1_{A \cap B} = 1_A 1_B$, $1_{\overline{A}} = 1 - 1_A$, puis en déduire $1_{A \cup B}$.

Exercice 8 - Indicatrice de la différence symétrique

Montrer que $1_{A \Delta B} = (1_A - 1_B)^2 = 1_A + 1_B - 2 1_A 1_B$.

Exercice 9 - Réunions et intersections infinies

Déterminer $\bigcup_{n \geq 1} \left[\frac{1}{n}; 1 \right]$ et $\bigcap_{n \geq 1} \left] -\frac{1}{n}; \frac{1}{n} \right[$.

Exercice 10 - Ensembles définis par des conditions

Soient $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$ et $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < \frac{3}{2}\right\}$. Écrire A , B , $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \setminus B$ sous forme d'intervalles.

Exercice 11 - Parties d'une intersection

Montrer que $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$. A-t-on $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$?

Exercice 12 - Différences emboîtées

- a) Montrer que $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
- b) Comparer avec $(A \setminus B) \setminus C$ sur un exemple.

Exercice 13 - Simplifier une expression

Simplifier $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, puis $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B)$.

Exercice 14 - Simplification dans une réunion

- a) L'implication $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$ est-elle vraie ?
- b) Montrer que si $A \cup B = A \cup C$ **et** $A \cap B = A \cap C$, alors $B = C$.

Exercice 15 - Synthèse : multiples de 2 et de 3

Dans $E = \llbracket 1 ; 30 \rrbracket$, on note A l'ensemble des multiples de 2 et B celui des multiples de 3.

- a) Décrire $A \cap B$.
- b) Calculer les cardinaux de A , B , $A \cap B$, $A \cup B$, $A \Delta B$ et $\overline{A \cup B}$.