

Plaquette 5 – Relations d'équivalence et relations d'ordre

Ensembles et applications — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Une relation R sur E est une propriété des couples (x, y) . Pour montrer qu'elle est une relation d'**équivalence**, on vérifie trois propriétés : réflexive, symétrique, transitive ; on décrit ensuite les **classes**, qui forment une partition de E . Pour une relation d'**ordre**, on remplace la symétrie par l'**antisymétrie** (xRy et $yRx \Rightarrow x = y$), puis on regarde si l'ordre est **total** (deux éléments toujours comparables) ou seulement **partiel**. Pour réfuter une propriété, un contre-exemple explicite suffit.

Exercice 1 – Congruence modulo 5

Sur $\mathbb{Z}$, on pose aRb si 5 divise $a - b$. Montrer que R est une relation d'équivalence et décrire ses classes.

Exercice 2 – Différence entière

Sur $\mathbb{R}$, on pose xRy si $x - y \in \mathbb{Z}$. Montrer que c'est une relation d'équivalence et montrer que chaque classe contient un unique élément de $[0 ; 1[$.

Exercice 3 – Même distance à l'origine

Sur $\mathbb{R}^2$, on pose $(x, y)R(x', y')$ si $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$. Montrer que c'est une relation d'équivalence et décrire géométriquement ses classes.

Exercice 4 – La relation « même image »

Soit $f: E \rightarrow F$. On pose xRy si $f(x) = f(y)$. Montrer que R est une relation d'équivalence, décrire ses classes, et traiter l'exemple $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.

Exercice 5 – Construire les rationnels

Sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on pose $(a, b)R(c, d)$ si $ad = bc$. Montrer que R est une relation d'équivalence. Quelle est la classe de $(1, 2)$?

Exercice 6 – Presque égaux

Sur $\mathbb{R}$, on pose xRy si $|x - y| \leq 1$. Est-ce une relation d'équivalence ?

Exercice 7 – La divisibilité sur $\mathbb{N}^*$

Montrer que la divisibilité est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$. Est-elle totale ?

Exercice 8 - La divisibilité sur $\mathbb{Z}$

La divisibilité est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$?

Exercice 9 - L'ordre produit

Sur $\mathbb{R}^2$, on pose $(x, y) \leq_p (x', y')$ si $x \leq x'$ et $y \leq y'$. Montrer que c'est une relation d'ordre. Est-il total ?

Exercice 10 - L'ordre lexicographique

Sur $\mathbb{R}^2$, on pose $(x, y) \leq_{\text{lex}} (x', y')$ si $x < x'$, ou si $x = x'$ et $y \leq y'$. Montrer que c'est un ordre total.

Exercice 11 - L'inclusion

Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Montrer que l'inclusion est une relation d'ordre sur $P(E)$. Est-il total ? A-t-il un plus petit et un plus grand élément ?

Exercice 12 - Minimaux et maximaux

On ordonne $A = \{2, 3, 4, 6\}$ par la divisibilité.

- a) Quels sont les éléments minimaux (aucun élément de A ne les divise strictement) et maximaux ?
- b) A a-t-il un plus petit ou un plus grand élément ?
- c) Quel est le plus petit majorant de A dans $\mathbb{N}^*$?

Exercice 13 - D'une partition à une relation

Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ muni de la partition $\{\{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\}$. On pose xRy si x et y sont dans la même partie.

- a) Montrer que R est une relation d'équivalence.
- b) Exprimer R par une condition arithmétique.

Exercice 14 - Symétrique et transitive sans être réflexive

Un étudiant affirme : « si R est symétrique et transitive, elle est réflexive, car xRy donne yRx , puis xRx par transitivité. » Trouver l'erreur et un contre-exemple.

Exercice 15 - Synthèse : le signe du produit

Sur $\mathbb{R}^*$, on pose xRy si $xy > 0$.

- a) Montrer que R est une relation d'équivalence.
- b) Déterminer ses classes.
- c) Sur $\mathbb{R}$ (en incluant 0), la même relation est-elle une relation d'équivalence ?