

Fiche de révision – Ensembles et applications

Licence 1 (L1) – définitions, identités et méthodes à savoir rédiger

1. Ensembles

Appartenance : $x \in E$. **Inclusion :** $A \subseteq E$.

$$A \subseteq B \iff \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B,$$

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A.$$

Ensemble des parties

$$\mathcal{P}(E) = \{A \mid A \subseteq E\}.$$

Si $|E| = n < \infty$, alors $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$.

Opérations

Pour $A, B \subseteq E$:

$$x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B,$$

$$x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B,$$

$$x \in A^c \iff x \notin A,$$

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \wedge x \notin B.$$

De Morgan :

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Distributivité :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Méthode : prouver $A = B$

Par double inclusion, ou en fixant x et en écrivant

$$x \in A \iff \dots \iff x \in B.$$

Produit cartésien

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}.$$

$$(x, y) = (x', y') \iff x = x' \text{ et } y = y'.$$

Si E, F sont finis : $|E \times F| = |E| |F|$.

Pièges de notation

$1 \in E$ n'est pas la même chose que $\{1\} \subseteq E$.

Un couple (a, b) est ordonné ; l'ensemble $\{a, b\}$ ne l'est pas.

2. Applications et images

Une application

$$f : E \rightarrow F, \quad x \mapsto f(x)$$

associe à chaque $x \in E$ un unique $f(x) \in F$. Les ensembles E et F font partie de sa définition.

Image de l'application :

$$\text{Im}(f) = f(E) \subseteq F.$$

Identité : $\text{Id}_E : E \rightarrow E, x \mapsto x$.

Image directe

Pour $A \subseteq E$,

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\}.$$

Image réciproque

Pour $B \subseteq F$,

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Elle est définie pour **toute** application f .

Identités à connaître

Pour $A, A' \subseteq E$ et $B, B' \subseteq F$:

$$f(A \cup A') = f(A) \cup f(A'),$$

$$f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A'),$$

$$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B'),$$

$$f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B'),$$

$$f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B),$$

$$f(f^{-1}(B)) = B \cap \text{Im}(f),$$

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)).$$

Piège majeur : deux sens de f^{-1}

$f^{-1}(B)$ = **image réciproque d'une partie B** : elle existe toujours.

$f^{-1} : F \rightarrow E$ = **application réciproque** : elle n'existe que si f est bijective.

Exemple. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$, alors

$$f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2],$$

bien que f ne soit pas bijective.

Méthodes et propriétés essentielles

3. Composition et restriction

Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$,

$$g \circ f : E \rightarrow G, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

On applique **d'abord** f , puis g .

Pour $A \subseteq E$, la restriction est

$$f|_A : A \rightarrow F, \quad x \mapsto f(x).$$

Changer le domaine peut changer l'injectivité; changer le codomaine peut changer la surjectivité.

4. Injective / surjective / bijective

Injective

$$\forall x, y \in E, \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Preuve : supposer $f(x) = f(y)$ et obtenir $x = y$.

Pour réfuter : trouver $x \neq y$ avec $f(x) = f(y)$.

Surjective

$$\forall y \in F, \exists x \in E, \quad f(x) = y.$$

Équivalent à $f(E) = F$.

Preuve : fixer $y \in F$, résoudre $f(x) = y$, puis vérifier $x \in E$.

Pour réfuter : exhiber $y \in F$ sans antécédent.

Bijective

f est bijective $\iff$ elle est injective et surjective $\iff$ chaque $y \in F$ possède un unique antécédent.
Alors $f^{-1} : F \rightarrow E$ existe et

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_E, \quad f \circ f^{-1} = \text{Id}_F.$$

Méthode efficace pour une bijection : pour $y \in F$, résoudre $f(x) = y$ et montrer qu'il existe une **unique** solution $x \in E$. La formule obtenue donne souvent $f^{-1}(y)$.

5. Composition : règles

Pour $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$:

- f, g injectives $\Rightarrow g \circ f$ injective ;
- f, g surjectives $\Rightarrow g \circ f$ surjective ;
- f, g bijectives $\Rightarrow g \circ f$ bijective ;
- $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective ;
- $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective ;
- si f, g sont bijectives,

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

6. Ensembles finis

Si E et F sont finis :

$$|E| > |F| \Rightarrow \text{pas d'injection } E \rightarrow F,$$

$$|E| < |F| \Rightarrow \text{pas de surjection } E \rightarrow F.$$

Si $|E| = |F| < \infty$, pour $f : E \rightarrow F$:

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}.$$

7. Exemple repère

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2.$$

f n'est ni injective ($f(1) = f(-1)$), ni surjective (-1 n'a pas d'antécédent).

En revanche,

$$g : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[, \quad g(x) = x^2$$

est bijective et $g^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Ce qui dépend du domaine / codomaine

Une même formule peut définir des applications ayant des propriétés différentes. Toujours lire la totalité de $f : E \rightarrow F$, pas seulement $f(x)$.

8. Checklist avant de conclure

- Ai-je identifié le **domaine** et le **codomaine** ?
- Pour une surjectivité, l'antécédent construit appartient-il bien au domaine ?
- Ai-je distingué image directe et image réciproque ?
- Une égalité d'ensembles est-elle justifiée dans les deux sens ?
- Si j'écris f^{-1} comme application, ai-je prouvé la bijectivité ?
- Dans $g \circ f$, ai-je respecté l'ordre : f puis g ?