

Ensembles et applications en L1 maths

Ensembles, images, composition, injectivité, surjectivité et bijectivité

Cours de Licence 1 – langage fondamental des mathématiques

Objectifs du chapitre. À la fin de ce cours, on doit savoir manipuler rigoureusement les opérations sur les ensembles, utiliser le produit cartésien et l'ensemble des parties, définir une application avec son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée, calculer une image directe ou une image réciproque, composer et restreindre des applications, puis démontrer qu'une application est injective, surjective ou bijective.

1. Langage des ensembles

Un **ensemble** est une collection d'objets, appelés ses **éléments**. On écrit

$$x \in E \quad \text{si } x \text{ appartient à } E, \quad x \notin E \quad \text{sinon.}$$

Les ensembles numériques usuels sont $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. L'ensemble sans élément est l'**ensemble vide**, noté $\emptyset$.

On peut décrire un ensemble par extension, par exemple $E = \{1, 2, 4\}$, ou par compréhension :

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 4\} = (-2, 2).$$

La barre verticale se lit « tel que ».

1.1. Inclusion et égalité

Inclusion

Pour deux ensembles A et B , on écrit

$$A \subseteq B$$

si tout élément de A appartient aussi à B , c'est-à-dire

$$\forall x, \quad x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Attention à ne pas confondre *appartenance* et *inclusion*. Si $E = \{1, 2, 3\}$, alors $1 \in E$, tandis que $\{1\} \subseteq E$. En revanche, $\{1\} \in E$ est faux ici.

Deux ensembles sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments :

$$A = B \iff (A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A).$$

C'est la méthode standard pour démontrer une égalité d'ensembles : procéder par **double inclusion**.

Méthode : prouver $A = B$

Montrer successivement :

$$\forall x, \quad x \in A \Rightarrow x \in B, \quad \forall x, \quad x \in B \Rightarrow x \in A.$$

On conclut alors $A = B$.

1.2. Ensemble des parties

L'ensemble des parties de E , noté $\mathcal{P}(E)$, est l'ensemble de tous les sous-ensembles de E :

$$\mathcal{P}(E) = \{A \mid A \subseteq E\}.$$

Par exemple, si $E = \{a, b\}$,

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

Si E est fini et possède n éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ possède 2^n éléments.

Piège classique

$A \subseteq E$ équivaut à $A \in \mathcal{P}(E)$. Il ne faut donc pas mélanger les symboles $\in$ et $\subseteq$: ils relient des objets de nature différente.

2. Opérations sur les ensembles

Soient A et B deux parties d'un même ensemble de référence E .

Opération	Notation	Caractérisation d'un élément x
Réunion	$A \cup B$	$x \in A \cup B \iff (x \in A) \vee (x \in B)$
Intersection	$A \cap B$	$x \in A \cap B \iff (x \in A) \wedge (x \in B)$
Complémentaire	$A^c = E \setminus A$	$x \in A^c \iff x \notin A$
Différence	$A \setminus B$	$x \in A \setminus B \iff (x \in A) \wedge (x \notin B)$

La réunion correspond au « ou » inclusif, l'intersection au « et », et le complémentaire à la négation.

2.1. Identités fondamentales

Pour toutes parties A, B, C de E :

$$\begin{aligned}
 A \cup B &= B \cup A, & A \cap B &= B \cap A & (\text{commutativité}), \\
 (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C), & (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) & (\text{associativité}), \\
 A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\
 A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) & (\text{distributivité}).
 \end{aligned}$$

On a aussi

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap E = A, \quad A \cup A^c = E, \quad A \cap A^c = \emptyset.$$

Lois de De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Plus généralement, le complémentaire transforme une réunion en intersection et une intersection en réunion.

Exemple de preuve. Montrons $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. Pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned}
 x \in (A \cup B)^c &\iff x \notin A \cup B \\
 &\iff \neg(x \in A \vee x \in B) \\
 &\iff (x \notin A) \wedge (x \notin B) \\
 &\iff x \in A^c \cap B^c.
 \end{aligned}$$

Les deux ensembles ont donc les mêmes éléments.

2.2. Produit cartésien

Produit cartésien

Pour deux ensembles E et F ,

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}.$$

Ses éléments sont des **couples ordonnés**. En général, $(x, y) \neq (y, x)$.

Par exemple,

$$\{1, 2\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}.$$

Si E et F sont finis, alors

$$|E \times F| = |E| |F|.$$

On note $E^2 = E \times E$ et plus généralement $E^n = E \times \cdots \times E$ (n facteurs).

Couple ou ensemble ?

Le couple (a, b) est ordonné : $(a, b) = (c, d)$ équivaut à $a = c$ et $b = d$. À l'inverse, l'ensemble $\{a, b\}$ ne tient pas compte de l'ordre.

3. Applications : définition et vocabulaire

Application

Une application f de E vers F associe à **chaque** élément $x \in E$ un **unique** élément de F , noté $f(x)$.
On écrit

$$f : E \longrightarrow F, \quad x \longmapsto f(x).$$

E est l'**ensemble de départ** et F l'**ensemble d'arrivée**.

L'ensemble d'arrivée fait partie de la donnée de l'application. Ainsi, les applications

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2, \quad g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[, \quad x \mapsto x^2$$

ont la même formule, mais ne sont pas la même application car leurs ensembles d'arrivée diffèrent.

Deux applications $f, g : E \rightarrow F$ sont égales si

$$\forall x \in E, \quad f(x) = g(x).$$

L'**application identité** de E est

$$\text{Id}_E : E \rightarrow E, \quad x \mapsto x.$$

3.1. Graphe d'une application

Le graphe de $f : E \rightarrow F$ est la partie de $E \times F$ définie par

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}.$$

Pour chaque $x \in E$, il existe exactement un couple de Γ_f dont la première composante est x .

4. Image directe et image réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$.

4.1. Image directe d'une partie

Image directe

Si $A \subseteq E$, l'image directe de A par f est

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\}.$$

C'est une partie de F .

L'**image** de l'application f est

$$\text{Im}(f) = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\} \subseteq F.$$

Exemple. Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$,

$$f([-2, 3]) = [0, 9], \quad \text{Im}(f) = [0, +\infty[.$$

4.2. Image réciproque d'une partie**Image réciproque**

Si $B \subseteq F$, l'image réciproque de B par f est

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

C'est une partie de E . Cette notation a un sens pour **toute** application f .

Exemple. Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$,

$$f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2].$$

Ici, f n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$, mais l'image réciproque d'une partie reste parfaitement définie.

Deux significations de f^{-1}

Image réciproque d'un ensemble : $f^{-1}(B)$ existe pour toute application $f : E \rightarrow F$ et toute partie $B \subseteq F$.

Application réciproque : $f^{-1} : F \rightarrow E$ n'existe que lorsque f est bijective. Le contexte permet de distinguer les deux notions.

4.3. Calcul avec les images

Pour $A, A' \subseteq E$ et $B, B' \subseteq F$:

$$\begin{aligned} f(A \cup A') &= f(A) \cup f(A'), \\ f(A \cap A') &\subseteq f(A) \cap f(A'), \\ f^{-1}(B \cup B') &= f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B'), \\ f^{-1}(B \cap B') &= f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B'), \\ f^{-1}(F \setminus B) &= E \setminus f^{-1}(B). \end{aligned}$$

La deuxième relation est seulement une inclusion en général.

Contre-exemple. Pour $f(x) = x^2$, $A = \{-1\}$ et $A' = \{1\}$,

$$A \cap A' = \emptyset \quad \text{mais} \quad f(A) \cap f(A') = \{1\}.$$

Donc $f(A \cap A') \neq f(A) \cap f(A')$.

On dispose également des relations très utiles

$$f(f^{-1}(B)) = B \cap \text{Im}(f), \quad A \subseteq f^{-1}(f(A)).$$

L'égalité $A = f^{-1}(f(A))$ pour toute partie $A \subseteq E$ caractérise l'injectivité.

5. Composition, restriction et corestriction

5.1. Composition

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. Leur composée est

$$g \circ f : E \rightarrow G, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

L'ordre est important : on applique d'abord f , puis g .

La composition est associative : si $h : G \rightarrow H$, alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Et les identités jouent le rôle d'éléments neutres :

$$f \circ \text{Id}_E = f, \quad \text{Id}_F \circ f = f.$$

5.2. Restriction et corestriction

Si $A \subseteq E$, la **restriction** de f à A est

$$f|_A : A \rightarrow F, \quad x \mapsto f(x).$$

On change l'ensemble de départ, pas la formule.

Si $B \subseteq F$ contient $f(E)$, on peut considérer la même formule avec ensemble d'arrivée B : c'est une **corestriction**. Modifier le domaine ou le codomaine peut modifier l'injectivité ou la surjectivité.

Exemple central. L'application $x \mapsto x^2$ n'est pas injective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$. En revanche,

$$h : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[, \quad x \mapsto x^2$$

est bijective.

6. Injectivité, surjectivité et bijectivité

Soit $f : E \rightarrow F$.

6.1. Injectivité

Injectivité

f est **injective** si deux éléments distincts de E ne peuvent pas avoir la même image :

$$\forall x, y \in E, \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Une formulation équivalente est

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

Méthode standard. Pour prouver l'injectivité, on prend $x, y \in E$, on suppose $f(x) = f(y)$, puis on démontre $x = y$.

Exemple. Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$: si $f(x) = f(y)$, alors

$$3x - 2 = 3y - 2 \Rightarrow 3x = 3y \Rightarrow x = y.$$

Donc f est injective.

Pour montrer qu'une application *n'est pas* injective, il suffit de trouver $x \neq y$ tels que $f(x) = f(y)$.

6.2. Surjectivité

Surjectivité

f est **surjective** si tout élément de F possède au moins un antécédent dans E :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, \quad f(x) = y.$$

Équivalentement, $f(E) = F$.

Méthode standard. On fixe un $y \in F$ arbitraire et on résout l'équation $f(x) = y$ en cherchant un $x \in E$.

Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$, étant donné $y \in \mathbb{R}$, le choix

$$x = \frac{y + 2}{3} \in \mathbb{R}$$

donne $f(x) = y$. Donc f est surjective.

Pour montrer qu'une application n'est pas surjective, il suffit d'exhiber un élément de F qui n'a aucun antécédent.

6.3. Bijectivité et application réciproque

Bijectivité

f est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective. Chaque élément $y \in F$ possède alors un **unique** antécédent $x \in E$.

Lorsque f est bijective, on définit son **application réciproque**

$$f^{-1} : F \rightarrow E$$

par la règle $f^{-1}(y) = x$ si et seulement si $f(x) = y$. Elle vérifie

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_E, \quad f \circ f^{-1} = \text{Id}_F.$$

Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$, on résout

$$y = 3x - 2 \iff x = \frac{y + 2}{3},$$

donc

$$f^{-1}(y) = \frac{y + 2}{3}.$$

Caractérisation par un inverse

Une application $f : E \rightarrow F$ est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que

$$g \circ f = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \text{Id}_F.$$

Dans ce cas, $g = f^{-1}$ et elle est unique.

7. Effet de la composition sur injectivité et surjectivité

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.

Règles de composition

- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

- Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Preuve du quatrième point. Supposons $g \circ f$ injective. Si $f(x) = f(y)$, alors

$$g(f(x)) = g(f(y)),$$

donc $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Par injectivité de $g \circ f$, on obtient $x = y$. Ainsi f est injective.

Les réciproques des deux derniers points sont fausses en général : le comportement de l'application composée ne suffit pas à imposer toutes les propriétés à chacun des deux facteurs.

8. Relations utiles entre ensembles et applications

Les propriétés suivantes apparaissent constamment en analyse, algèbre et probabilités.

Énoncé	Condition / commentaire
$f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$	Toujours vrai.
$f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$	Toujours vrai ; égalité si f est injective.
$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$	Toujours vrai.
$f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$	Toujours vrai.
$f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$	Toujours vrai.
$f(f^{-1}(B)) = B \cap \text{Im}(f)$	Donc égal à B si $B \subseteq \text{Im}(f)$.
$A \subseteq f^{-1}(f(A))$	Égalité pour tout A si et seulement si f est injective.

Pourquoi les images réciproques se comportent-elles mieux ? Parce que tester $x \in f^{-1}(B)$ revient simplement à tester $f(x) \in B$. Les opérations logiques sur l'appartenance sont donc conservées exactement.

9. Méthodes de démonstration à connaître

9.1. Démontrer une égalité d'ensembles

Utiliser la double inclusion ou une chaîne d'équivalences d'appartenance :

$$x \in A \iff \dots \iff x \in B.$$

9.2. Démontrer l'injectivité

Écrire clairement : « Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. » Puis transformer cette égalité jusqu'à obtenir $x = y$.

9.3. Démontrer la surjectivité

Écrire : « Soit $y \in F$. Cherchons $x \in E$ tel que $f(x) = y$. » Résoudre l'équation et vérifier que le x obtenu appartient bien à E .

9.4. Démontrer la bijectivité

Deux méthodes sont usuelles :

1. démontrer séparément injectivité puis surjectivité ;
2. pour tout $y \in F$, montrer que l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution $x \in E$.

La seconde méthode construit souvent directement f^{-1} .

Vérifications indispensables

Une formule donnant un candidat x ne suffit pas : il faut vérifier que x appartient bien à l'ensemble de départ. De même, la surjectivité dépend de l'ensemble d'arrivée, et l'injectivité dépend de l'ensemble de départ.

10. Exemples complets

10.1. Un polynôme du second degré

Considérons

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + 1.$$

f n'est pas injective car $f(1) = f(-1) = 2$ avec $1 \neq -1$. Elle n'est pas surjective car aucun réel n'est envoyé sur 0 ; en fait,

$$\text{Im}(f) = [1, +\infty[.$$

La restriction

$$g : [0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[, \quad g(x) = x^2 + 1$$

est bijective et

$$g^{-1}(y) = \sqrt{y - 1}.$$

10.2. Une application sur un ensemble fini

Soit $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{a, b, c, d\}$. Une application $f : E \rightarrow F$ ne peut pas être surjective, car trois éléments du domaine ne peuvent pas atteindre quatre éléments distincts. En revanche, elle peut être injective.

Plus généralement, pour des ensembles finis :

$$|E| > |F| \Rightarrow \text{aucune application } E \rightarrow F \text{ n'est injective,}$$

$$|E| < |F| \Rightarrow \text{aucune application } E \rightarrow F \text{ n'est surjective.}$$

Si $|E| = |F| < \infty$, alors injectivité, surjectivité et bijectivité sont équivalentes pour une application $f : E \rightarrow F$.

11. Pièges classiques à éviter

1. **Confondre** $x \in E$ et $A \subseteq E$. Un élément et une partie ne jouent pas le même rôle.
2. **Oublier l'ensemble d'arrivée.** La formule $x \mapsto x^2$ est surjective vers $[0, +\infty[$, mais pas vers $\mathbb{R}$.
3. **Écrire** f^{-1} **sans préciser le sens.** $f^{-1}(B)$ est une image réciproque d'ensemble ; f^{-1} comme application exige que f soit bijective.

4. **Transformer une inclusion en égalité.** En général,

$$f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$$

mais l'égalité peut échouer si f n'est pas injective.

5. **Inverser l'ordre d'une composition.** $(g \circ f)(x) = g(f(x))$: f agit d'abord.

6. **Prouver la surjectivité avec un x qui n'appartient pas au domaine.** La résolution algébrique doit respecter les ensembles de départ et d'arrivée.

12. Exercices d'entraînement corrigés

Exercice 1 – Opérations sur les ensembles

Soient $A, B, C \subseteq E$. Montrer

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Correction. Pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \cup C) &\iff x \in A \text{ et } x \notin B \cup C \\ &\iff x \in A \text{ et } x \notin B \text{ et } x \notin C \\ &\iff x \in A \setminus B \text{ et } x \in A \setminus C \\ &\iff x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C). \end{aligned}$$

Exercice 2 – Image réciproque

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$. Calculer $f^{-1}([1, 5])$.

Correction.

$$1 \leq 2x - 3 \leq 5 \iff 4 \leq 2x \leq 8 \iff 2 \leq x \leq 4.$$

Donc

$$f^{-1}([1, 5]) = [2, 4].$$

Exercice 3 – Bijectivité

Soit

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(x) = \frac{x-1}{x+1}.$$

Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} .

Correction. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Résolvons $y = f(x)$:

$$y = \frac{x-1}{x+1} \iff y(x+1) = x-1 \iff x(y-1) = -(1+y).$$

Comme $y \neq 1$,

$$x = \frac{1+y}{1-y}.$$

Ce réel est différent de -1 : sinon $1+y = -(1-y)$ donnerait $1 = -1$. L'équation possède donc, pour tout $y \neq 1$, une unique solution dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ainsi f est bijective et

$$f^{-1}(y) = \frac{1+y}{1-y}.$$

Exercice 4 – Composition

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Correction. Soit $z \in G$. Puisque $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que

$$g(f(x)) = z.$$

En posant $y = f(x) \in F$, on a $g(y) = z$. Tout élément de G possède donc un antécédent par g , ce qui prouve la surjectivité de g .

13. À retenir

- Une égalité d'ensembles se prouve par double inclusion ou par équivalences d'appartenance.
- $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble de toutes les parties de E ; si $|E| = n$, alors $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$.
- $f(A)$ désigne une image directe ; $f^{-1}(B)$ une image réciproque, définie même si f n'est pas bijective.
- Injective : au plus un antécédent ; surjective : au moins un antécédent ; bijective : exactement un antécédent.
- L'application réciproque $f^{-1} : F \rightarrow E$ existe exactement lorsque f est bijective.
- Les ensembles de départ et d'arrivée font partie de la définition de l'application et influencent directement injectivité et surjectivité.