

Plaquette 5 - Modélisation : physique, chimie, biologie

Équations différentielles linéaires — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Premier ordre $y' = -\frac{1}{\tau}(y - y_\infty)$: la solution tend vers y_∞ avec la constante de temps τ ,

$$y(t) = y_\infty + (y(0) - y_\infty)e^{-t/\tau}$$

- Seuils utiles : 63 % du chemin parcouru à $t = \tau$, 95 % à 3τ , 99 % à 5τ environ. Temps de doublement ou de demi-vie : $\tau \ln 2$.
- **Oscillateur** $x'' + 2\alpha x' + \omega_0^2 x = 0$: pseudo-périodique si $\alpha < \omega_0$, critique si $\alpha = \omega_0$, apériodique si $\alpha > \omega_0$; sans amortissement, période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.
- **Circuits** : RC, $\tau = RC$; RL, $\tau = \frac{L}{R}$; LC, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.
- **Méthode d'Euler** : $y_{k+1} = y_k + h F(t_k, y_k)$ pour $y' = F(t, y)$; l'erreur est proportionnelle au pas h .

Correction de l'exercice 1 - Chute avec frottement

— **Forme canonique** : $v' = -\frac{k}{m}\left(v - \frac{mg}{k}\right)$, avec $\tau = \frac{m}{k} = 5$ s et $v_\infty = \frac{mg}{k} = 49$ m/s.

— **Solution** :

$$v(t) = 49(1 - e^{-t/5})$$

- **Seuil de 95 %** : $e^{-t/5} = 0,05$, soit $t = 5 \ln 20 \approx 15,0$ s (environ 3τ).
- **Vraisemblance** : 49 m/s $\approx$ 176 km/h, l'ordre de grandeur d'une chute libre avant ouverture du parachute ✓

Réponse. $v(t) = 49(1 - e^{-t/5})$; 49 m/s ; 15 s.

Correction de l'exercice 2 - Établissement du courant dans un circuit RL

— **Forme canonique** : $i' = -\frac{R}{L}\left(i - \frac{E}{R}\right)$: constante de temps $\tau = \frac{L}{R} = 0,05$ s, intensité limite $\frac{E}{R} = 1,2$ A.

$$i(t) = 1,2(1 - e^{-20t})$$

- **Vérification** : $Li' + Ri = 0,5 \times 24e^{-20t} + 12 - 12e^{-20t} = 12$ ✓
- **Interprétation** : la bobine s'oppose aux variations du courant, qui ne peut pas « sauter » de 0 à 1,2 A. Le régime permanent est atteint en $5\tau = 0,25$ s environ.

Réponse. $i(t) = 1,2(1 - e^{-20t})$; $\tau = 0,05$ s.

Correction de l'exercice 3 - Décharge d'un condensateur

— **Solution** : $u(t) = 10e^{-t/\tau}$.

— **Seuil** : $10e^{-t/\tau} = 1$ donne

$$t = \tau \ln 10 \approx 2 \times 2,303 = 4,6 \text{ ms}$$

- **Règle mnémotechnique** : diviser la tension par 10 prend $\tau \ln 10 \approx 2,3\tau$, quelle que soit la tension de départ.

- **Contrôle** : à $t = \tau$, $u = 3,7 \text{ V}$; à $t = 2\tau$, $1,35 \text{ V}$; le seuil de 1 V est bien un peu après 2τ ✓

Réponse. $t = \tau \ln 10 \approx 4,6 \text{ ms}$.

Correction de l'exercice 4 - Rinçage d'une cuve

- **Bilan** : le volume reste 200 L . Il n'entre pas de sel ; il en sort $4 \times \frac{Q}{200} \text{ g/min}$, donc $Q' = -\frac{Q}{50}$ et $Q(0) = 200 \times 50 = 10\,000 \text{ g}$.
- **Solution** : $Q(t) = 10\,000 e^{-t/50}$, et la concentration $c(t) = 50 e^{-t/50}$.
- **Seuil** : $50 e^{-t/50} = 1$ donne

$$t = 50 \ln 50 \approx 196 \text{ min}$$

- soit environ $3 \text{ h } 16 \text{ min}$. Il a fallu faire passer près de 4 fois le volume de la cuve (784 L) : un rinçage n'est jamais « complet », la concentration décroît exponentiellement.

Réponse. $t = 50 \ln 50 \approx 196 \text{ min}$.

Correction de l'exercice 5 - Perfusion d'un médicament

- **Équilibre** : $q' = 0$ donne $q_\infty = 20 \text{ mg}$; constante de temps $\tau = 10 \text{ h}$.

$$q(t) = 20(1 - e^{-0,1t})$$

- **90 % de l'équilibre** : $e^{-0,1t} = 0,1$, soit $t = 10 \ln 10 \approx 23 \text{ h}$.
- **Conséquence médicale** : un traitement de ce type met environ une journée à devenir pleinement efficace. Pour aller plus vite, on commence par une **dose de charge** : avec $q(0) = 20 \text{ mg}$, l'équilibre est atteint d'emblée.

Réponse. $q_\infty = 20 \text{ mg}$; environ 23 h .

Correction de l'exercice 6 - Population avec immigration

- **Solution particulière constante** : $0,02k + 100 = 0$, soit $k = -5\,000$ (sans sens démographique, mais utile au calcul).

- **Solution** : $P(t) = -5\,000 + Ce^{0,02t}$ et $P(0) = 1\,000$ donne $C = 6\,000$:

$$P(t) = 6\,000 e^{0,02t} - 5\,000$$

- **Doublement** : $P(t) = 2\,000$ donne $e^{0,02t} = \frac{7}{6}$, soit $t = 50 \ln \frac{7}{6} \approx 7,7 \text{ ans}$.
- **Comparaison** : sans immigration, il faudrait $50 \ln 2 \approx 34,7 \text{ ans}$; l'apport constant domine tant que la population est petite.

Réponse. $P(t) = 6\,000 e^{0,02t} - 5\,000$; environ $7,7 \text{ ans}$.

Correction de l'exercice 7 - Circuit LC

- **Forme canonique** : $q'' + \omega_0^2 q = 0$ avec

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,1 \times 10^{-5}}} = 1\,000 \text{ rad/s}$$

- **Fréquence** : $f = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 159 \text{ Hz}$; période $T \approx 6,3 \text{ ms}$.

- **Solution** : $q = \lambda \cos 1000t + \mu \sin 1000t$, avec $\lambda = q_0$ et $1000\mu = 0$, donc $q(t) = q_0 \cos(1000t)$.

- **Énergie** : $\frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2}$ est constante ; l'énergie passe périodiquement du condensateur à la bobine.

Réponse. $\omega_0 = 1000 \text{ rad/s}$, $f \approx 159 \text{ Hz}$; $q = q_0 \cos 1000t$.

Correction de l'exercice 8 - Résistance critique d'un circuit RLC

— **Caractéristique** : $Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0$, de discriminant $R^2 - \frac{4L}{C}$.

— **Régime critique** : discriminant nul, soit

$$R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{0,1}{10^{-5}}} = 200 \Omega$$

— **Pour** $R = 50 \Omega < R_c$: régime **pseudo-périodique**. Les racines sont $-\frac{R}{2L} \pm i\beta$ avec $\frac{R}{2L} = 250 \text{ s}^{-1}$ et $\beta = \sqrt{10^6 - 250^2} \approx 968 \text{ rad/s}$: des oscillations proches de celles du circuit LC, amorties en e^{-250t} .

Réponse. $R_c = 200 \Omega$; pour 50Ω , pseudo-périodique.

Correction de l'exercice 9 - Petites oscillations d'un pendule

— **Pulsation** : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \approx 3,132 \text{ rad/s}$.

— **Solution** : $\theta = \lambda \cos \omega_0 t + \mu \sin \omega_0 t$; $\theta(0) = 0,1$ et $\theta'(0) = 0$ donnent $\theta(t) = 0,1 \cos(3,132 t)$.

— **Période** :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \approx 2,006 \text{ s}$$

— Elle ne dépend ni de la masse, ni de l'amplitude (tant qu'elle reste petite) : c'est l'isochronisme utilisé dans les horloges. Un pendule « qui bat la seconde » mesure environ 1 m.

— **Limite du modèle** : l'équation vient de $\sin \theta \approx \theta$, valable tant que θ reste petit.

Réponse. $\theta = 0,1 \cos(3,13t)$; $T_0 \approx 2,01 \text{ s}$.

Correction de l'exercice 10 - Oscillateur mécanique amorti

— **Caractéristique** : $r^2 + 2r + 10 = 0$, $\Delta = -36$, racines $-1 \pm 3i$.

— **Solution générale** : $x = e^{-t}(\lambda \cos 3t + \mu \sin 3t)$; $x(0) = \lambda = 1$ et $x'(0) = -\lambda + 3\mu = 0$, donc $\mu = \frac{1}{3}$:

$$x(t) = e^{-t} \left(\cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t \right)$$

— **Pseudo-période** : $T = \frac{2\pi}{3} \approx 2,09 \text{ s}$; sur cette durée, l'amplitude est multipliée par $e^{-2\pi/3} \approx 0,123$.

— En pratique, après deux ou trois oscillations, le mouvement n'est plus visible.

Réponse. $x = e^{-t}(\cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t)$; facteur $e^{-2\pi/3} \approx 0,12$.

Correction de l'exercice 11 - Méthode d'Euler

— **Schéma** : $y_{k+1} = y_k + hy_k = (1+h)y_k$, donc $y_k = (1+h)^k$.

— a) 5 pas : $1,1^5 = 1,61051$, alors que $e^{0,5} \approx 1,64872$: erreur $\approx 0,038$.

— b) 10 pas : $1,05^{10} \approx 1,62889$: erreur $\approx 0,0198$.

$$\frac{0,0382}{0,0198} \approx 1,93 \approx 2$$

- Diviser le pas par 2 divise l'erreur par environ 2 : la méthode est **d'ordre 1**.
L'approximation est par défaut, car la courbe est convexe et chaque pas suit une tangente, qui reste sous la courbe.

Réponse. a) 1,6105 · b) 1,6289 ; erreur divisée par 2 environ.

Correction de l'exercice 12 - Heure du décès

- **Écart à la pièce** $\theta = T - 20$: $\theta' = -k\theta$. On a $\theta = 10$ à 10 h et $\theta = 5$ à 12 h : l'écart est divisé par 2 toutes les 2 heures, donc

$$\theta(t) = 10 \times 2^{-(t-10)/2} \quad (t \text{ en heures})$$

- **Décès** : $\theta = 17$ donne $2^{-(t-10)/2} = 1,7$, soit $t - 10 = -2 \log_2 1,7 \approx -1,53$.
- **Heure** : $t \approx 8,47$, c'est-à-dire vers 8 h 28.
- **Vraisemblance** : entre le décès et 10 h, l'écart passe de 17 à 10, moins d'une division par 2 : il s'est écoulé moins de 2 h ✓

Réponse. Vers 8 h 30.

Correction de l'exercice 13 - Culture bactérienne

- **Solution** : $N(t) = N_0 e^{kt}$; le doublement en 20 min donne $k = \frac{\ln 2}{20}$, donc $N(t) = N_0 2^{t/20}$.

- **Facteur à atteindre** : 1 000, d'où

$$t = 20 \log_2 1000 = \frac{20 \ln 1000}{\ln 2} \approx 199 \text{ min}$$

- soit environ 3 h 20. **Contrôle rapide** : $2^{10} = 1\,024 \approx 1\,000$, donc il faut un peu moins de 10 doublements, soit un peu moins de 200 minutes ✓
- **Limite du modèle** : la croissance ralentit quand les nutriments s'épuisent (modèle logistique).

Réponse. Environ 199 min.

Correction de l'exercice 14 - Un capital qu'on entame

- **Équilibre** : $0,03C = 6\,000$ donne $C^* = 200\,000$ €.

- **Solution** : $C(t) = 200\,000 + (100\,000 - 200\,000)e^{0,03t}$, soit

$$C(t) = 200\,000 - 100\,000 e^{0,03t}$$

- **Épuisement** : $e^{0,03t} = 2$, soit $t = \frac{\ln 2}{0,03} \approx 23,1$ ans.

- **Prélèvement soutenable** : les intérêts du capital initial, $0,03 \times 100\,000 = 3\,000$ € par an : alors $C' = 0$.

Réponse. Épuisé après 23,1 ans ; 3 000 €/an le laisse constant.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : régime transitoire et régime permanent

a) Avec $z_p = ke^{it}$: $k(-1 + 2i + 5) = 10$, donc $k = \frac{10}{4 + 2i} = 2 - i$, et

$$x_p = \operatorname{Re}((2 - i)e^{it}) = 2 \cos t + \sin t, \text{ d'amplitude } \sqrt{5}.$$

b) Homogène : racines $-1 \pm 2i$. Les conditions donnent $A = -2$ et $1 + 2 + 2B = 0$, soit $B = -\frac{3}{2}$:

$$x(t) = 2 \cos t + \sin t - e^{-t} \left(2 \cos 2t + \frac{3}{2} \sin 2t \right)$$

c) Le transitoire a pour amplitude $\sqrt{4 + \frac{9}{4}} e^{-t} = 2,5 e^{-t}$. On veut $2,5e^{-t} < 0,01\sqrt{5}$, soit $t > \ln \frac{2,5}{0,01\sqrt{5}} \approx 4,7$.

Réponse. a) $2 \cos t + \sin t$ · c) $t > 4,7$ environ.