

## Plaquette 2 - Ordre 1 à coefficients variables et raccordements

### Équations différentielles linéaires — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

**Résolution sur un intervalle**  $I$  ( $a, b$  continues,  $A$  primitive de  $a$ ) :

$$y' + a(x)y = b(x) \Leftrightarrow y(x) = e^{-A(x)} \left( \int b(x) e^{A(x)} dx + C \right)$$

- **Variation de la constante** :  $y = C(x)e^{-A(x)}$  conduit à  $C'(x) = b(x)e^{A(x)}$ .
- **Dérivée d'un produit** :  $xy' + y = (xy)'$  ;  $(1 + x^2)y' + 2xy = ((1 + x^2)y)'$ .
- **Cauchy** : pour  $x_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$ , une **unique** solution vérifie  $y(x_0) = y_0$  ; une solution de l'homogène qui s'annule une fois est nulle partout.
- **Raccordement** en un point  $x_0$  où le coefficient de  $y'$  s'annule : les solutions sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions solutions de chaque côté, **continues** et **dérivables** en  $x_0$ , qui vérifient l'équation en  $x_0$ .

#### Correction de l'exercice 1 - Homogène à coefficient variable

- **Primitive du coefficient** :  $a(x) = 2x$ ,  $A(x) = x^2$ .
- **Solution générale** :

$$y(x) = C e^{-x^2}$$

- **Condition initiale** :  $y(0) = C = 3$ , donc  $y(x) = 3e^{-x^2}$ .
- **Vérification** :  $y' = -6xe^{-x^2} = -2xy \checkmark$
- **Allure** : une courbe « en cloche », paire, maximale en 0 ; la décroissance est bien plus rapide qu'avec un coefficient constant.

**Réponse.**  $y(x) = 3e^{-x^2}$ .

#### Correction de l'exercice 2 - Solution particulière évidente

- **Homogène** :  $y_h = C e^{-x^2}$  (primitive  $x^2$  de  $2x$ ).
- **Particulière** : la fonction constante  $y = 1$  convient, car  $0 + 2x \times 1 = 2x$ .
- **Solution générale** :

$$y(x) = 1 + C e^{-x^2}$$

- **Réflexe** : avant de lancer la variation de la constante, tester une constante (ici  $y = \frac{b}{a}$  quand ce quotient est constant).
- **Comportement** : toutes les solutions tendent vers 1 en  $\pm\infty$ .

**Réponse.**  $y(x) = 1 + C e^{-x^2}$ .

#### Correction de l'exercice 3 - Reconnaître une dérivée de produit

Le membre de gauche est la dérivée d'un produit :

$$(1 + x^2)y' + 2xy = ((1 + x^2)y)'$$

- L'équation s'écrit  $((1 + x^2)y)' = 1$ , donc  $(1 + x^2)y = x + C$ .

- **Solution générale** :  $y(x) = \frac{x+C}{1+x^2}$ , définie sur tout  $\mathbb{R}$  car  $1+x^2$  ne s'annule jamais.
- **Vérification** avec la méthode générale :  $a(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ ,  $A = \ln(1+x^2)$ ,  $y_h = \frac{C}{1+x^2}$  ✓
- Toutes les solutions tendent vers 0 en  $\pm\infty$ .

**Réponse.**  $y(x) = \frac{x+C}{1+x^2}$ .

### Correction de l'exercice 4 - Variation de la constante

- **Homogène** :  $a(x) = -\frac{1}{x}$ ,  $A(x) = -\ln x$ , donc  $y_h = Ce^{\ln x} = Cx$ .
- **Variation** :  $y = C(x)x$  donne  $y' - \frac{y}{x} = C'(x)x$ , d'où  $C'(x) = x$  et  $C(x) = \frac{x^2}{2} + K$ .
- **Solution générale** :

$$y(x) = \frac{x^3}{2} + Kx$$

- **Vérification** :  $y' - \frac{y}{x} = \frac{3x^2}{2} + K - \frac{x^2}{2} - K = x^2$  ✓

**Réponse.**  $y(x) = \frac{x^3}{2} + Kx$ .

### Correction de l'exercice 5 - Un coefficient trigonométrique

- **Primitive** :  $\int \tan x \, dx = -\ln(\cos x)$  sur cet intervalle, où  $\cos x > 0$ .
- **Homogène** :  $y_h = Ce^{\ln \cos x} = C \cos x$ .
- **Variation** :  $y = C(x) \cos x$  donne  $C'(x) \cos x = \cos x$ , soit  $C'(x) = 1$  et  $C(x) = x + K$ .
- **Solution générale** :  $y(x) = (x + K) \cos x$  ; la condition  $y(0) = K = 3$  donne

$$y(x) = (x + 3) \cos x$$

- **Vérification** :  $y' = \cos x - (x + 3) \sin x$  et  $y \tan x = (x + 3) \sin x$  : la somme vaut  $\cos x$  ✓

**Réponse.**  $y(x) = (x + 3) \cos x$ .

### Correction de l'exercice 6 - Une intégration par parties

- **Homogène** :  $A(x) = -2 \ln x$ , donc  $y_h = Cx^2$ .
- **Variation** :  $y = C(x)x^2$  donne  $C'(x)x^2 = x^2 \ln x$ , soit  $C'(x) = \ln x$ .
- **Primitive de  $\ln$**  (par parties) :  $C(x) = x \ln x - x + K$ .
- **Solution générale** :

$$y(x) = x^3 \ln x - x^3 + Kx^2$$

- **Contrôle numérique** avec  $K = 2$  et  $x = 2$  :  $y'(2) - y(2) = 4 \ln 2 \approx 2,773$ , ce qu'on retrouve en calculant  $y'(x) = 3x^2 \ln x - 2x^2 + 2Kx$  ✓

**Réponse.**  $y(x) = x^3 \ln x - x^3 + Kx^2$ .

### Correction de l'exercice 7 - Problème de Cauchy avec un logarithme

Le membre de gauche est  $(xy)'$ , donc l'équation s'écrit  $(xy)' = \ln x$  et

$$xy = x \ln x - x + C$$

- **Solution générale** :  $y(x) = \ln x - 1 + \frac{C}{x}$ .
- **Condition** :  $y(1) = -1 + C = 0$ , donc  $C = 1$  et  $y(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$ .

- **Étude rapide** :  $y'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$ , donc  $y$  admet en 1 un minimum égal à 0 :  $y \geq 0$ , c'est-à-dire  $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$  — une inégalité classique retrouvée au passage.

**Réponse.**  $y(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$ .

### Correction de l'exercice 8 - Une solution qui s'annule

Soit  $A$  la primitive de  $a$  nulle en  $x_0$ , et  $z(x) = y(x)e^{-A(x)}$ .

- **Dérivée** :  $z' = (y' - ay)e^{-A} = 0$  ;  $z$  est constante sur l'intervalle  $I$ .
- **Valeur** :  $z(x_0) = y(x_0)e^0 = 0$ , donc  $z = 0$ , et

$$y(x) = z(x)e^{A(x)} = 0 \quad \text{pour tout } x \in I$$

- **Conséquence** : une solution non nulle de l'homogène **garde un signe constant** sur  $I$ . C'est un cas particulier de l'unicité de Cauchy :  $y$  et la fonction nulle ont la même valeur en  $x_0$ .

**Réponse.**  $ye^{-A}$  est constante, nulle en  $x_0$ .

### Correction de l'exercice 9 - Raccordement : un espace de dimension 2

- **Sur**  $]0; +\infty[$  :  $y' = \frac{2}{x}y$ , donc  $y = C_1x^2$ . **Sur**  $] - \infty; 0[$  : de même  $y = C_2x^2$ .
- **Raccordement en 0** : on pose  $y(x) = C_1x^2$  si  $x \geq 0$  et  $C_2x^2$  si  $x < 0$ . Cette fonction est continue en 0 (limite 0), dérivable en 0 avec  $y'(0) = 0$  (les deux taux d'accroissement tendent vers 0), et l'équation en 0 s'écrit  $0 - 0 = 0$  ✓
- **Conclusion** : pour **tous**  $C_1, C_2$  réels,

$$y(x) = \begin{cases} C_1x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ C_2x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Les solutions forment un espace de **dimension 2**, et non 1 : le théorème de Cauchy ne s'applique pas sur  $\mathbb{R}$ , car le coefficient de  $y'$  s'annule en 0 (d'ailleurs  $y(0) = 0$  pour toutes).

**Réponse.**  $C_1x^2$  sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $C_2x^2$  sur  $\mathbb{R}_-$  : dimension 2.

### Correction de l'exercice 10 - Raccordement : une seule solution

- **Sur chaque demi-droite** :  $(xy)' = 1$ , donc  $xy = x + C$  et  $y = 1 + \frac{C}{x}$  (constante  $C_1$  à droite,  $C_2$  à gauche).
- **Continuité en 0** :  $1 + \frac{C_1}{x}$  n'a une limite finie en  $0^+$  que si  $C_1 = 0$  ; de même  $C_2 = 0$  à gauche.
- **Candidat** :  $y = 1$  sur  $\mathbb{R}^*$ , prolongé par  $y(0) = 1$  ; il est dérivable et vérifie l'équation en 0 ( $0 + 1 = 1$ ) ✓

$$S_{\mathbb{R}} = \{ x \mapsto 1 \}$$

- Contraste avec l'exercice précédent : selon l'équation, le raccordement laisse deux constantes libres, une seule ou aucune.

**Réponse.** Une seule solution :  $y = 1$ .

### Correction de l'exercice 11 - Raccordement : une constante commune

- **Sur chaque demi-droite** : l'homogène donne  $y = Cx$  ;  $y = x^2$  est solution particulière ( $2x^2 - x^2 = x^2$ ). Donc  $y = x^2 + C_1x$  pour  $x > 0$  et  $y = x^2 + C_2x$  pour  $x < 0$ .

- **Continuité en 0** : les deux expressions tendent vers 0 ; on pose  $y(0) = 0$ . Aucune contrainte.
- **Dérivabilité en 0** : le taux d'accroissement  $\frac{y(x)}{x} = x + C_i$  tend vers  $C_1$  à droite,  $C_2$  à gauche. Il faut  $C_1 = C_2$ .
- **Conclusion** (l'équation en 0 s'écrit  $0 - 0 = 0$ ) :

$$S_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto x^2 + Cx, C \in \mathbb{R}\}$$

**Réponse.**  $y(x) = x^2 + Cx, C \in \mathbb{R}$ .

### Correction de l'exercice 12 - Se ramener à une équation linéaire

- **Calcul** :  $z' = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{y^2 - y}{y^2} = -1 + \frac{1}{y} = z - 1$ .
- **Équation linéaire** :  $z' - z = -1$ , de solution  $z = 1 + Ce^x$ .
- **Retour à y** :

$$y(x) = \frac{1}{1 + Ce^x}$$

- sur tout intervalle où  $1 + Ce^x \neq 0$  (tout  $\mathbb{R}$  si  $C \geq 0$ ).
- **Vérification** avec  $C = 1$  :  $y(0) = \frac{1}{2}$ ,  $y'(0) = -\frac{1}{4}$  et  $y^2 - y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$  ✓ C'est une équation de **Bernoulli** : non linéaire, mais linéarisée par  $z = \frac{1}{y}$ .

**Réponse.**  $y(x) = \frac{1}{1 + Ce^x}$ .

### Correction de l'exercice 13 - Une résonance d'ordre 1

- **Homogène** :  $y_h = Ce^{-x}$ . Le second membre est **solution de l'homogène** : l'essai  $ke^{-x}$  échoue.
- **Variation** :  $y = C(x)e^{-x}$  donne  $C'(x)e^{-x} = e^{-x}$ , soit  $C(x) = x + K$  :  

$$y(x) = (x + K)e^{-x}$$
- **Limite** : par croissances comparées,  $xe^{-x} \rightarrow 0$ , donc toutes les solutions tendent vers 0.
- **Maximum** de la solution  $K = 0$  :  $y' = (1 - x)e^{-x}$  s'annule en 1, où  $y = \frac{1}{e} \approx 0,368$ .

**Réponse.**  $y(x) = (x + K)e^{-x} \rightarrow 0$ .

### Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

- Vrai** :  $y = Cx, C \in \mathbb{R}$  ; c'est  $\text{Vect}(x \mapsto x)$ .
- Faux** : si  $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ , l'unicité de Cauchy impose  $y_1 = y_2$ . Les courbes intégrales ne se coupent jamais.
- Vrai** : par linéarité,  $(y_1 - y_2)' + a(y_1 - y_2) = b - b = 0$ .
- Vrai** :  $A(x) = -\cos x$  est une primitive de  $\sin$ , donc

$$y(x) = Ce^{-\cos x}, \quad |y(x)| \leq |C|e$$

**Réponse.** a) vrai · b) faux · c) vrai · d) vrai.

### Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une cuve qui se remplit

- Le volume vaut  $V(t) = 100 + t$ . Il entre  $3 \times 20 = 60$  g/min ; il sort 2 L/min à la concentration  $\frac{Q}{V}$ .

b) **Homogène** :  $A(t) = 2 \ln(100 + t)$ , donc  $Q_h = \frac{C}{(100 + t)^2}$ . En multipliant par  $(100 + t)^2$ , l'équation devient  $((100 + t)^2 Q)' = 60(100 + t)^2$ , d'où  $(100 + t)^2 Q = 20(100 + t)^3 + K$ . La condition  $Q(0) = 0$  donne  $K = -2 \times 10^7$  :

$$Q(t) = 20(100 + t) - \frac{2 \times 10^7}{(100 + t)^2}$$

c) Concentration  $\frac{Q}{V} = 20 - \frac{2 \times 10^7}{(100 + t)^3}$  ; en  $t = 100$  :  $20 - 2,5 = 17,5$  g/L. Elle tend vers 20 g/L, celle de la saumure versée.

**Réponse.** b)  $Q(t) = 20(100 + t) - \frac{2 \cdot 10^7}{(100 + t)^2}$  · c) 17,5 g/L.