

**Plaquette 1 - Ordre 1, ordre 2 à
coefficients constants et modélisation**
Équations différentielles linéaires — Licence 1 (L1)
Corrections détaillées

Boîte à outils

Ordre 1 : $y' + a(x)y = b(x)$ sur un intervalle I .

— **Homogène** : avec A une primitive de a ,

$$y' + a(x)y = 0 \Leftrightarrow y(x) = Ce^{-A(x)}, C \in \mathbb{R}$$

— **Structure** : solution générale = y_h + une solution **particulière**.

— **Second membre reconnaissable** : constante $\rightarrow$ chercher une constante ;
polynôme de degré $n \rightarrow$ un polynôme de degré n ; $ke^{mx} \rightarrow \lambda e^{mx}$ (sauf résonance).

— **Variation de la constante** : poser $y = C(x)e^{-A(x)}$; il reste $C'(x) = b(x)e^{A(x)}$.

— **Problème de Cauchy** : une condition $y(x_0) = y_0$ détermine une **unique** solution.

Ordre 2 à coefficients constants : $ay'' + by' + cy = 0$.

Équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$, de discriminant Δ :

— $\Delta > 0$, racines $r_1 \neq r_2$: $y = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$;

— $\Delta = 0$, racine double r : $y = (\lambda + \mu x)e^{rx}$;

— $\Delta < 0$, racines $\alpha \pm i\beta$: $y = e^{\alpha x}(\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x)$.

Second membre. On ajoute une solution particulière ; en cas de **résonance** (exposant du second membre racine caractéristique), multiplier l'essai par x (racine simple) ou x^2 (racine double).

Modèles classiques.

— **Décroissance / croissance** : $y' = ky$ donne $y = y_0 e^{kt}$; **demi-vie** $T = \frac{\ln 2}{|k|}$.

— **Loi de Newton** : $T' = -k(T - T_{\text{ext}})$.

— **Oscillateur** : $y'' + \omega^2 y = 0$ (période $\frac{2\pi}{\omega}$) ; avec amortissement, $y'' + 2\lambda y' + \omega^2 y = 0$.

— **Circuit RC** : $q' + \frac{q}{RC} = \frac{E}{R}$, de constante de temps $\tau = RC$.

Correction de l'exercice 1 - Équation homogène d'ordre 1

— **Solution générale** : $a(x) = 3$, primitive $A(x) = 3x$, donc $y = Ce^{-3x}$.

— **Condition initiale** : $y(0) = C = 5$.

— **Solution** : $y(x) = 5e^{-3x}$.

— **Vérification** : $y' = -15e^{-3x} = -3y$ ✓

— **Comportement** : décroissance exponentielle, $y \rightarrow 0$ en $+\infty$. La valeur est divisée par 2 tous les $\frac{\ln 2}{3} \approx 0,231$ unités de temps.

— **Contrôle numérique** : $y(1) = 5e^{-3} \approx 0,249$ — soit 5 % de la valeur initiale ✓

— **Unicité** : garantie par le théorème de Cauchy linéaire — il n'existe pas d'autre solution.

Réponse. $y(x) = 5e^{-3x}$.

Correction de l'exercice 2 - Second membre constant

- **Homogène** : $y_h = Ce^{2x}$.
- **Particulière** : le second membre est constant, on cherche $y_p = k$. Alors $-2k = 6$, donc $k = -3$.
- **Solution générale** : $y(x) = -3 + Ce^{2x}$.
- **Vérification** : $y' = 2Ce^{2x}$ et $y' - 2y = 2Ce^{2x} + 6 - 2Ce^{2x} = 6$ ✓
- **Point d'équilibre** : $y = -3$ est la solution **constante**. Comme le coefficient 2 est **positif**, cet équilibre est **instable** : toute perturbation s'amplifie.
- **Comparaison** : si l'équation était $y' + 2y = 6$, l'équilibre $y = 3$ serait **attractif** (toutes les solutions y convergeraient).
- **Contrôle** avec $C = 1$: $y(0) = -2$, $y(1) = -3 + 7,389 = 4,389$ — la solution s'éloigne bien de -3 ✓

Réponse. $y(x) = -3 + Ce^{2x}$.

Correction de l'exercice 3 - Second membre polynomial

- **Homogène** : $y_h = Ce^{-x}$.
- **Particulière** : on cherche un polynôme de degré 2, $y_p = ax^2 + bx + c$.
- $y_p' + y_p = 2ax + b + ax^2 + bx + c = ax^2 + (2a + b)x + (b + c)$.
- **Identification** avec x^2 : $a = 1$; $2a + b = 0$ donc $b = -2$; $b + c = 0$ donc $c = 2$.
- **Solution générale** : $y(x) = x^2 - 2x + 2 + Ce^{-x}$.
- **Vérification** : $y_p' = 2x - 2$, et $y_p' + y_p = 2x - 2 + x^2 - 2x + 2 = x^2$ ✓
- **Comportement asymptotique** : en $+\infty$, le terme exponentiel s'efface et $y \sim x^2$ — la solution « suit » le second membre.
- **Méthode** : chercher une particulière de **même nature** que le second membre est le réflexe de base ; le degré est conservé quand le coefficient de y est non nul.

Réponse. $y(x) = x^2 - 2x + 2 + Ce^{-x}$.

Correction de l'exercice 4 - Coefficient non constant

- **Forme normalisée** : $y' + \frac{2}{x}y = x^2$.
- **Homogène** : $a(x) = \frac{2}{x}$, primitive $2 \ln x$, donc $y_h = Ce^{-2 \ln x} = \frac{C}{x^2}$.
- **Particulière** : on cherche $y_p = \alpha x^3$. Alors $3\alpha x^2 + 2\alpha x^2 = 5\alpha x^2 = x^2$, donc $\alpha = \frac{1}{5}$.
- **Solution générale** : $y(x) = \frac{x^3}{5} + \frac{C}{x^2}$.
- **Vérification** : $xy' = x \left(\frac{3x^2}{5} - \frac{2C}{x^3} \right) = \frac{3x^3}{5} - \frac{2C}{x^2}$, et en ajoutant $2y$ on obtient x^3 ✓
- **Astuce de reconnaissance** : $xy' + 2y = \frac{1}{x}(x^2y)'$ — l'équation s'écrit $(x^2y)' = x^4$, donc $x^2y = \frac{x^5}{5} + C$ ✓ (même résultat, immédiatement).
- **Comportement** : en 0^+ , la solution diverge sauf si $C = 0$ — le point $x = 0$ est **singulier**.

Réponse. $y(x) = \frac{x^3}{5} + \frac{C}{x^2}$.

Correction de l'exercice 5 - Variation de la constante

- **Homogène** : $y_h = Ce^{-x}$.
- **Variation de la constante** : on pose $y = C(x)e^{-x}$, donc $y' = C'e^{-x} - Ce^{-x}$ et $y' + y = C'(x)e^{-x}$
- L'équation devient $C'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$, qui est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = 1 + e^x$.
- **Primitive** : $C(x) = \ln(1 + e^x) + K$.
- **Solution générale** :

$$y(x) = e^{-x}[\ln(1 + e^x) + K]$$
- **Quand l'utiliser** : le second membre n'est ni polynomial ni exponentiel simple — aucune forme « à deviner ». La variation de la constante est la méthode **systématique**.
- **Contrôle** : avec $K = 0$ et $x = 0$, $y(0) = \ln 2 \approx 0,693$; et $y'(0) = -\ln 2 + \frac{1}{2} \approx -0,193$, tandis que $\frac{1}{2} - y(0) = -0,193 \checkmark$

Réponse. $y(x) = e^{-x}[\ln(1 + e^x) + K]$.

Correction de l'exercice 6 - Ordre 2, discriminant positif

- **Équation caractéristique** : $r^2 - 5r + 6 = 0$, racines 2 et 3.
- **Solution générale** : $y = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$.
- **Conditions** : $y(0) = \lambda + \mu = 1$; $y'(x) = 2\lambda e^{2x} + 3\mu e^{3x}$ donne $2\lambda + 3\mu = 0$.
- **Résolution** : de la seconde, $\mu = -\frac{2\lambda}{3}$; en reportant, $\lambda - \frac{2\lambda}{3} = \frac{\lambda}{3} = 1$, donc $\lambda = 3$ et $\mu = -2$.
- **Solution** : $y(x) = 3e^{2x} - 2e^{3x}$.
- **Vérification** : $y(0) = 3 - 2 = 1 \checkmark$ et $y'(0) = 6 - 6 = 0 \checkmark$
- **Comportement** : en $+\infty$, le terme en e^{3x} **domine** avec un coefficient négatif, donc $y \rightarrow -\infty$ — malgré un départ à 1 avec tangente horizontale.

Réponse. $y(x) = 3e^{2x} - 2e^{3x}$.

Correction de l'exercice 7 - Ordre 2, racine double

- **Caractéristique** : $r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2 = 0$, racine **double** $r = -1$.
- **Solution générale** : $y = (\lambda + \mu x)e^{-x}$.
- **Conditions** : $y(0) = \lambda = 1$.
- $y'(x) = \mu e^{-x} - (\lambda + \mu x)e^{-x}$, donc $y'(0) = \mu - \lambda = 1$, soit $\mu = 2$.
- **Solution** : $y(x) = (1 + 2x)e^{-x}$.
- **Vérification** : $y'(0) = 2 - 1 = 1 \checkmark$
- **Régime** : c'est le **régime critique** (amortissement exactement suffisant pour éviter les oscillations) — le plus rapide sans dépassement, recherché en automatique.
- **Maximum** : $y' = (1 - 2x)e^{-x}$ s'annule en $x = \frac{1}{2}$, où $y = 2e^{-1/2} \approx 1,213$; puis la solution décroît vers 0.

Réponse. $y(x) = (1 + 2x)e^{-x}$.

Correction de l'exercice 8 - Ordre 2, discriminant négatif

- **Caractéristique** : $r^2 + 9 = 0$, racines $\pm 3i$ ($\alpha = 0$, $\beta = 3$).
- **Solution générale** : $y = \lambda \cos 3x + \mu \sin 3x$.
- **Conditions** : $y(0) = \lambda = 2$; $y'(x) = -3\lambda \sin 3x + 3\mu \cos 3x$ donne $y'(0) = 3\mu = 3$, soit $\mu = 1$.
- **Solution** : $y(x) = 2 \cos 3x + \sin 3x$.
- **Forme amplitude-phase** : $y(x) = \sqrt{5} \cos(3x - \varphi)$ avec $\tan \varphi = \frac{1}{2}$, soit $\varphi \approx 0,4636$ rad.
- **Caractéristiques** : amplitude $\sqrt{5} \approx 2,236$, pulsation 3, période $\frac{2\pi}{3} \approx 2,094$.
- **Vérification** : $y'' = -18 \cos 3x - 9 \sin 3x = -9y$ ✓
- **Modèle physique** : oscillateur harmonique **non amorti** — l'énergie est conservée, l'amplitude reste constante.

Réponse. $y(x) = 2 \cos 3x + \sin 3x = \sqrt{5} \cos(3x - 0,464)$.

Correction de l'exercice 9 - Résonance

- **Homogène** : $r^2 - 1 = 0$, racines ± 1 , donc $y_h = \lambda e^x + \mu e^{-x}$.
- **Résonance** : l'exposant 1 du second membre **est** racine caractéristique. Un essai ke^x donnerait $0 = e^x$ — impossible.
- **Essai adapté** : $y_p = kxe^x$.
- $y_p' = k(1+x)e^x$ et $y_p'' = k(2+x)e^x$, donc

$$y_p'' - y_p = k(2+x-x)e^x = 2ke^x = e^x$$
- D'où $k = \frac{1}{2}$ et $y_p = \frac{xe^x}{2}$.
- **Solution générale** : $y(x) = \frac{xe^x}{2} + \lambda e^x + \mu e^{-x}$.
- **Règle** : racine **simple** → multiplier par x ; racine **double** → par x^2 .
- **Interprétation physique** : en régime forcé à la fréquence propre, l'amplitude croît **linéairement** en t — c'est le phénomène de résonance.

Réponse. $y(x) = \frac{xe^x}{2} + \lambda e^x + \mu e^{-x}$.

Correction de l'exercice 10 - Décroissance radioactive

- **Modèle** : $N' = -kN$, donc $N(t) = N_0 e^{-kt}$.
- **Constante k** : la demi-vie donne $e^{-kT} = \frac{1}{2}$, donc

$$k = \frac{\ln 2}{5730} \approx 1,2097 \times 10^{-4} \text{ an}^{-1}$$
- **Équation à résoudre** : $e^{-kt} = 0,30$, soit $t = \frac{-\ln(0,30)}{k} = \frac{1,20397}{1,2097 \times 10^{-4}}$.
- **Âge** : $t \approx 9\,953$ ans.
- **Contrôle de vraisemblance** : 30 % est entre 50 % (une demi-vie, 5 730 ans) et 25 % (deux demi-vies, 11 460 ans) — l'âge doit être entre les deux ✓
- **Formule directe** : $t = T \times \frac{\ln(1/0,3)}{\ln 2} = 5730 \times 1,737 \approx 9\,953$ ans ✓
- **Limite de la méthode** : au-delà de 50 000 ans, il reste trop peu de carbone 14 pour une mesure fiable.

Réponse. Environ 9 950 ans.

Correction de l'exercice 11 - Circuit RC

- **Constante de temps** : $\tau = RC = 1000 \times 10^{-3} = 1 \text{ s}$.
 - **Équation** : $u' + u = 5$.
 - **Solution générale** : $u(t) = 5 + Ce^{-t}$; la condition $u(0) = 0$ donne $C = -5$.

$$u(t) = 5(1 - e^{-t})$$
 - **Temps pour 4 V** : $5(1 - e^{-t}) = 4$ donne $e^{-t} = 0,2$, donc $t = \ln 5 \approx 1,609 \text{ s}$.
 - **Vérification** : $u(1,609) = 5(1 - 0,2) = 4 \checkmark$
 - **Repères usuels** : à $t = \tau$, $u = 63 \%$ de E (soit 3,16 V) ; à $t = 3\tau$, 95 % ; à $t = 5\tau$, 99,3 %
 — le régime est considéré comme établi après 5τ .
 - **Contrôle** : 4 V = 80 % de E , atteint à $1,6\tau$ — entre τ et $3\tau \checkmark$
- Réponse.** $u(t) = 5(1 - e^{-t})$; 4 V atteints en $\ln 5 \approx 1,61 \text{ s}$.

Correction de l'exercice 12 - Oscillateur amorti

- **Caractéristique** : $r^2 + 4r + 13 = 0$, $\Delta = 16 - 52 = -36$.
- **Racines** : $r = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i$.
- **Solution générale** :

$$y(x) = e^{-2x}(\lambda \cos 3x + \mu \sin 3x)$$
- **Régime : pseudo-périodique amorti** — oscillations de pulsation 3 (pseudo-période $\frac{2\pi}{3} \approx 2,094$) dont l'amplitude décroît en e^{-2x} .
- **Décrément** : sur une pseudo-période, l'amplitude est multipliée par $e^{-2 \times 2,094} \approx 0,0152$ — elle chute de 98,5 % : l'amortissement est **fort**.
- **Comparaison des trois régimes** (pour $y'' + 2\lambda y' + \omega^2 y = 0$) : $\lambda < \omega$ **pseudo-périodique** ; $\lambda = \omega$ **critique** ; $\lambda > \omega$ **apériodique**. Ici $\lambda = 2 < \omega = \sqrt{13} \approx 3,606 \checkmark$
- **Toutes les solutions tendent vers 0** : les parties réelles des racines sont **négatives**, l'équilibre est stable.

Réponse. $y = e^{-2x}(\lambda \cos 3x + \mu \sin 3x)$: pseudo-périodique amorti.

Correction de l'exercice 13 - Loi de refroidissement de Newton

- **Changement d'inconnue** : $\theta = T - 20$ vérifie $\theta' = -k\theta$, donc $\theta(t) = 60 e^{-kt}$ et

$$T(t) = 20 + 60 e^{-kt}$$
- **Constante k** : $T(10) = 50$ donne $e^{-10k} = \frac{1}{2}$, soit $k = \frac{\ln 2}{10} \approx 0,0693 \text{ min}^{-1}$: l'écart à la pièce est divisé par 2 toutes les 10 minutes.
- **Instant cherché** : $T(t) = 30$ donne $e^{-kt} = \frac{1}{6}$, soit $t = \frac{10 \ln 6}{\ln 2} \approx 25,8 \text{ min}$.
- **Contrôle** : l'écart passe de 60 à 30 (10 min), 15 (20 min), 7,5 (30 min) ; l'écart 10 est bien atteint entre 20 et 30 minutes $\checkmark$

Réponse. $T(t) = 20 + 60e^{-t \ln 2 / 10}$; 30 °C vers 25,8 min.

Correction de l'exercice 14 - Second membre trigonométrique

- **Homogène** : $y_h = Ce^{-x}$.

- **Particulière** : on cherche $y_p = a \cos x + b \sin x$ (les deux termes sont nécessaires, la dérivation échange cosinus et sinus). Alors

$$y_p' + y_p = (a + b) \cos x + (b - a) \sin x$$

- **Identification** avec $\cos x$: $a + b = 1$ et $b - a = 0$, donc $a = b = \frac{1}{2}$.
- **Condition initiale** : $y(0) = \frac{1}{2} + C = 0$, donc $C = -\frac{1}{2}$, et $y(x) = \frac{\cos x + \sin x - e^{-x}}{2}$.
- **Interprétation** : le terme e^{-x} est un **régime transitoire** ; il reste le régime forcé $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, en retard de phase sur l'excitation.

Réponse. $y(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x - e^{-x})$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : modèle logistique linéarisé

a) - **Équilibre** : $0,03P = 60$ donne $P^* = 2\,000$.

- **Solution générale** : $P(t) = 2000 + Ce^{0,03t}$; la condition initiale donne $C = 1500 - 2000 = -500$.

$$P(t) = 2000 - 500e^{0,03t}$$

b) **Analyse.** Le coefficient de l'exponentielle est **positif** et le taux 0,03 est **positif** : la population **décroît** et s'effondre.

- **Date d'extinction** : $P(t) = 0$ donne $e^{0,03t} = 4$, donc

$$t = \frac{\ln 4}{0,03} \approx 46,2 \text{ ans}$$

- **Contrôles** : $P(0) = 1500 \checkmark$; $P(20) = 2000 - 500 \times 1,8221 \approx 1089$; $P(40) = 2000 - 500 \times 3,3201 \approx 340 \checkmark$ — décroissance accélérée.
- **Interprétation** : l'équilibre $P^* = 2\,000$ est **instable**. Au-dessus, la population explose ; en dessous, elle s'éteint — le prélèvement constant de 60 individus par an est **insoutenable** pour cette population initiale.
- **Seuil critique** : il aurait fallu $P(0) > 2\,000$ pour assurer la survie.

Réponse. a) $P(t) = 2000 - 500e^{0,03t}$. b) extinction vers $t \approx 46$ ans.