

Plaquette 3 - Ordre 2 : seconds membres et conditions

Équations différentielles linéaires — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Second membre $P(x)e^{mx}$ ($m \in \mathbb{C}$, P polynôme) : on cherche

$$y_p(x) = x^s Q(x) e^{mx}, \quad \deg Q = \deg P, \quad s = \text{multiplicité de } m \text{ comme racine}$$

- **Calcul pratique** : pour $y = Qe^{mx}$, on a $y' = (Q' + mQ)e^{mx}$ et $y'' = (Q'' + 2mQ' + m^2Q)e^{mx}$.
- **Cosinus, sinus** : $\cos \omega x = \operatorname{Re}(e^{i\omega x})$; on résout avec $e^{i\omega x}$ et on prend la partie réelle (coefficients a, b, c réels).
- **Superposition** : si y_1 convient pour f_1 et y_2 pour f_2 , alors $y_1 + y_2$ convient pour $f_1 + f_2$.
- **Cauchy** : $y(x_0)$ et $y'(x_0)$ imposés donnent une unique solution ; deux conditions en deux points distincts peuvent donner zéro, une ou une infinité de solutions.

Correction de l'exercice 1 - Second membre constant

- **Caractéristique** : $r^2 - 3r + 2 = (r - 1)(r - 2)$, racines 1 et 2.
- **Homogène** : $y_h = \lambda e^x + \mu e^{2x}$.
- **Particulière** : une constante k vérifie $2k = 4$, soit $k = 2$.
- **Solution générale** :

$$y(x) = 2 + \lambda e^x + \mu e^{2x}$$

- **Remarque** : la constante 2 est un équilibre **instable** (les racines sont positives) ; seule la solution $\lambda = \mu = 0$ reste bornée en $+\infty$.

Réponse. $y = 2 + \lambda e^x + \mu e^{2x}$.

Correction de l'exercice 2 - Second membre polynomial

- **Caractéristique** : $r^2 + r - 2 = (r - 1)(r + 2)$; $y_h = \lambda e^x + \mu e^{-2x}$.
- **Particulière** : 0 n'est pas racine, on essaie $y_p = ax^2 + bx + c$:

$$y_p'' + y_p' - 2y_p = -2ax^2 + (2a - 2b)x + (2a + b - 2c)$$

- **Identification** : $-2a = 1$, puis $2a - 2b = 0$, puis $2a + b - 2c = 0$, d'où $a = b = -\frac{1}{2}$ et $c = -\frac{3}{4}$.

- **Solution générale** : $y(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{3}{4} + \lambda e^x + \mu e^{-2x}$.

- **Contrôle** en $x = 0$: $y_p'' + y_p' - 2y_p = -1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 0$ ✓

Réponse. $y = -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{3}{4} + \lambda e^x + \mu e^{-2x}$.

Correction de l'exercice 3 - Exponentielle non résonante

- **Caractéristique** : $r^2 - 4r + 3$, racines 1 et 3 ; $y_h = \lambda e^x + \mu e^{3x}$.
- **Particulière** : 2 n'est pas racine, on essaie ke^{2x} ; en notant $\chi(r) = r^2 - 4r + 3$:

$$(ke^{2x})'' - 4(ke^{2x})' + 3ke^{2x} = k\chi(2)e^{2x} = -ke^{2x}$$

- Donc $k = -1$ et $y(x) = -e^{2x} + \lambda e^x + \mu e^{3x}$.
- **Règle générale** : si $\chi(m) \neq 0$, $y_p = \frac{e^{mx}}{\chi(m)}$.

Réponse. $y = -e^{2x} + \lambda e^x + \mu e^{3x}$.

Correction de l'exercice 4 - Résonance sur une racine double

- **Caractéristique** : $(r-1)^2$, racine **double** 1 ; $y_h = (\lambda + \mu x)e^x$.
- **Essai** : 1 est racine double, donc $y_p = Q(x)e^x$ avec Q de degré 2. Avec les formules de dérivation de Qe^x :

$$y'' - 2y' + y = (Q'' + 2Q' + Q - 2Q' - 2Q + Q)e^x = Q''e^x$$

- Il suffit que $Q'' = 1$: $Q(x) = \frac{x^2}{2}$.
- **Solution générale** : $y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + \mu x + \lambda\right)e^x$.

Réponse. $y = \left(\frac{x^2}{2} + \mu x + \lambda\right)e^x$.

Correction de l'exercice 5 - Polynôme fois exponentielle

- **Caractéristique** : $r^2 - r = r(r-1)$, racines 0 et 1 ; $y_h = \lambda + \mu e^x$.
- **Essai** : 1 est racine **simple**, on prend $y_p = Qe^x$ avec Q de degré 2 sans terme constant, et

$$y_p'' - y_p' = (Q'' + Q')e^x$$

- Avec $Q = ax^2 + bx$: $Q'' + Q' = 2ax + (2a + b) = x$, donc $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$.
- **Solution générale** : $y(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^x + \lambda + \mu e^x$.

Réponse. $y = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^x + \lambda + \mu e^x$.

Correction de l'exercice 6 - Un cosinus sans résonance

- **Homogène** : racines $\pm i$; $y_h = \lambda \cos x + \mu \sin x$.
- **Particulière** : $2i$ n'est pas racine, et l'équation ne contient pas de y' : un essai $k \cos 2x$ suffit. Alors $-4k + k = 1$, donc $k = -\frac{1}{3}$.

$$y(x) = -\frac{1}{3} \cos 2x + \lambda \cos x + \mu \sin x$$

- **Pourquoi pas de sinus dans l'essai ?** Sans terme en y' , les dérivées paires de $\cos 2x$ restent des cosinus. Avec un terme en y' , il faudrait $k_1 \cos 2x + k_2 \sin 2x$.

Réponse. $y = -\frac{1}{3} \cos 2x + \lambda \cos x + \mu \sin x$.

Correction de l'exercice 7 - Passage par les complexes

- **Homogène** : $r^2 + 2r + 2 = 0$, racines $-1 \pm i$; $y_h = e^{-x}(\lambda \cos x + \mu \sin x)$.
- **Équation complexe** : on cherche $z_p = ke^{ix}$ solution de $z'' + 2z' + 2z = 5e^{ix}$:

$$k(i^2 + 2i + 2) = 5 \Leftrightarrow k = \frac{5}{1 + 2i} = 1 - 2i$$

- **Partie réelle** : $\operatorname{Re}((1 - 2i)(\cos x + i \sin x)) = \cos x + 2 \sin x$.
- **Solution générale** : $y(x) = \cos x + 2 \sin x + e^{-x}(\lambda \cos x + \mu \sin x)$.
- **Vérification** : $y_p'' + 2y_p' + 2y_p = (-1 + 4 + 2) \cos x + (-2 - 2 + 4) \sin x = 5 \cos x \checkmark$

Réponse. $y = \cos x + 2 \sin x + e^{-x}(\lambda \cos x + \mu \sin x)$.

Correction de l'exercice 8 - Un sinus résonant

- **Résonance** : i est racine simple de $r^2 + 1$. On résout $z'' + z = e^{ix}$ avec $z_p = kxe^{ix}$; on trouve $z_p'' + z_p = 2ik e^{ix}$, donc $k = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$.

- **Partie imaginaire** (le second membre est $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$) :

$$\operatorname{Im}\left(-\frac{i}{2}x(\cos x + i \sin x)\right) = -\frac{x \cos x}{2}$$

- **Solution générale** : $y(x) = -\frac{x \cos x}{2} + \lambda \cos x + \mu \sin x$.
- **Vérification** : pour $y_p = -\frac{x \cos x}{2}$, $y_p'' = \sin x + \frac{x \cos x}{2}$, donc $y_p'' + y_p = \sin x \checkmark$
L'amplitude croît linéairement.

Réponse. $y = -\frac{x \cos x}{2} + \lambda \cos x + \mu \sin x$.

Correction de l'exercice 9 - Principe de superposition

- **Homogène** : racines ± 1 ; $y_h = \lambda e^x + \mu e^{-x}$.
- **Pour le second membre** x : $y_1 = -x$ convient ($0 + x = x$).
- **Pour** e^{2x} : 2 n'est pas racine, $y_2 = \frac{e^{2x}}{x(2)} = \frac{e^{2x}}{3}$.
- **Superposition** (linéarité de $y \mapsto y'' - y$) :

$$y(x) = -x + \frac{e^{2x}}{3} + \lambda e^x + \mu e^{-x}$$

Réponse. $y = -x + \frac{e^{2x}}{3} + \lambda e^x + \mu e^{-x}$.

Correction de l'exercice 10 - Problème de Cauchy

- **Solution générale** : $y_h = \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x$ et $y_p = 2$ (constante : $4k = 8$), donc $y = 2 + \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x$.
- **Conditions**, appliquées à la solution **générale** (pas à y_h seule) : $y(0) = 2 + \lambda = 0$ et $y'(0) = 2\mu = 0$:

$$y(x) = 2 - 2 \cos 2x = 4 \sin^2 x$$

- **Interprétation** : un ressort lâché sans vitesse à distance 2 de sa position d'équilibre oscille entre 0 et 4, de période π .
- **Erreur classique** : appliquer les conditions avant d'avoir ajouté y_p .

Réponse. $y(x) = 2 - 2 \cos 2x$.

Correction de l'exercice 11 - Deux conditions aux bords

Les solutions sont $y = \lambda \cos x + \mu \sin x$, et $y(0) = 0$ impose $\lambda = 0$: il reste $y = \mu \sin x$.

- $\mu \sin \frac{\pi}{2} = \mu = 1$: **une** solution, $y = \sin x$.
- $\mu \sin \pi = 0$ pour tout μ : **une infinité** de solutions.
- $\mu \times 0 = 1$ est impossible : **aucune** solution.

$$\sin \pi = 0 \Rightarrow y(\pi) = 0 \text{ pour toute solution nulle en } 0$$

- Contrairement au problème de Cauchy (valeur et dérivée **au même point**), un problème aux limites n'a pas toujours une unique solution.

Réponse. a) une · b) une infinité · c) aucune.

Correction de l'exercice 12 - Retrouver l'équation

- $e^x \cos x = \operatorname{Re}(e^{(1+i)x})$: il suffit que $1 + i$ soit racine caractéristique, et alors $1 - i$ aussi (coefficients réels).
- **Polynôme caractéristique** : $(r - 1 - i)(r - 1 + i) = (r - 1)^2 + 1 = r^2 - 2r + 2$, donc $b = -2$ et $c = 2$.
- **Solutions** :

$$y(x) = e^x(\lambda \cos x + \mu \sin x)$$

- **Vérification directe** : avec $y = e^x \cos x$, $y' = e^x(\cos x - \sin x)$ et $y'' = -2e^x \sin x$;
 $y'' - 2y' + 2y = e^x(-2 \sin x - 2 \cos x + 2 \sin x + 2 \cos x) = 0 \checkmark$

Réponse. $b = -2$, $c = 2$.

Correction de l'exercice 13 - Stabilité selon un paramètre

Le produit des racines de $r^2 + ar + 1$ vaut 1 et leur somme $-a$.

- **Si** $|a| < 2$: racines $-\frac{a}{2} \pm i\beta$, solutions $e^{-ax/2}(\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x)$. Elles tendent vers 0 si et seulement si $a > 0$; pour $a = 0$, elles sont périodiques.
- **Si** $a \geq 2$: racines réelles de produit 1 > 0 et de somme $-a < 0$: toutes deux **négligables**, les solutions tendent vers 0.
- **Si** $a \leq -2$: racines positives, les solutions non nulles divergent.
toutes les solutions tendent vers 0 $\Leftrightarrow a > 0$
- En physique, a est le coefficient de frottement : il faut et il suffit qu'il y ait amortissement.

Réponse. $a > 0$.

Correction de l'exercice 14 - Conservation de l'énergie

- **Dérivée** : $E' = 2y'y'' + 2\omega^2yy' = 2y'(y'' + \omega^2y) = 0$, donc E est constante.
- **Majoration** : $\omega^2y^2 \leq E$ puisque $y'^2 \geq 0$, d'où

$$|y(x)| \leq \frac{\sqrt{E}}{\omega} = \frac{\sqrt{y'(0)^2 + \omega^2y(0)^2}}{\omega}$$

- **Contrôle** sur $y = 2 \cos 3x + \sin 3x$: $E = 3^2 + 9 \times 4 = 45$ et $\frac{\sqrt{45}}{3} = \sqrt{5}$, l'amplitude exacte : la borne est atteinte.
- Sans résoudre l'équation, on obtient que toutes les solutions sont bornées.

Réponse. $E' = 2y'(y'' + \omega^2y) = 0$; $|y| \leq \frac{\sqrt{E}}{\omega}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : ressort forcé et résonance

- $y_p = \frac{\cos \omega t}{4 - \omega^2}$; avec les conditions : $x(t) = \frac{\cos \omega t - \cos 2t}{4 - \omega^2}$.
- Résonance ($2i$ racine) : avec $z_p = kte^{2it}$, on trouve $4ik = 1$, et la partie réelle donne $\frac{t \sin 2t}{4}$, qui vérifie déjà $x(0) = x'(0) = 0$:

$$x(t) = \frac{t \sin 2t}{4}$$

- Les oscillations ont une amplitude $\frac{t}{4}$ qui **croît sans limite** : le ressort finit par casser.
- c) À t fixé, $\frac{\cos \omega t - \cos 2t}{4 - \omega^2}$ est un taux d'accroissement en ω ; sa limite vaut $\frac{-t \sin 2t}{-4} = \frac{t \sin 2t}{4}$ ✓

Réponse. a) $\frac{\cos \omega t - \cos 2t}{4 - \omega^2}$. b) $\frac{t \sin 2t}{4}$.