

Plaquette 4 - Structure des solutions et changements de variable

Équations différentielles linéaires — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Structure (a, b, f continues sur un intervalle I) :

$$S = y_p + S_h, \quad \dim S_h = 2 \quad \text{pour } y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

- **Wronskien** de deux solutions : $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$ vérifie $W' = -aW$; il est soit nul partout, soit jamais nul ; il est non nul si et seulement si (y_1, y_2) est une base de S_h .
- **Équation d'Euler** $x^2 y'' + pxy' + qy = 0$ sur $]0; +\infty[$: avec $x = e^t$ et $z(t) = y(e^t)$, on a $xy' = z'$ et $x^2 y'' = z'' - z'$; l'équation devient à coefficients constants.
- **Changement de fonction** : $y = z e^g$ ou $y(x) = z(\varphi(x))$; on calcule y' et y'' en fonction de z , puis on substitue.
- **Parité, périodicité** : si $x \mapsto y(-x)$ est encore solution, l'unicité de Cauchy permet de conclure sur la parité d'une solution.

Correction de l'exercice 1 - Espace vectoriel, espace affine

a) La fonction nulle est solution ; si y_1, y_2 sont solutions et α, β réels, alors par linéarité de la dérivation, $(\alpha y_1 + \beta y_2)'' + (\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$. C'est même le **noyau** de l'application linéaire $y \mapsto y'' + y$.

b) Non : la fonction nulle n'est pas solution ($0 \neq x$). Mais $y_p = x$ convient, et $y \in S \Leftrightarrow y - x \in S_h$:

$$S = \{x + \lambda \cos x + \mu \sin x ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

— C'est un **plan affine** passant par y_p , dirigé par $S_h = \text{Vect}(\cos, \sin)$.

Réponse. $S_h = \text{noyau}$; $S = x + \text{Vect}(\cos, \sin)$.

Correction de l'exercice 2 - Wronskien et base de solutions

a) $W' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$. On remplace $y_i'' = -ay_i' - by_i$:

$$W' = y_1(-ay_2' - by_2) - (-ay_1' - by_1)y_2 = -a(y_1 y_2' - y_1' y_2) = -aW$$

— Donc $W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x a}$: nul partout ou nulle part (**formule de Liouville**).

— b) $W = \cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \sin x = 1$, constant (ici $a = 0$) et non nul : $(\cos, \sin)$ est une base de S_h .

Réponse. $W' = -aW$; $W(\cos, \sin) = 1$.

Correction de l'exercice 3 - Équation d'Euler : racines réelles

— **Substitution** : $y = x^\alpha$ donne $x^2 y'' = \alpha(\alpha - 1)x^\alpha$ et $xy' = \alpha x^\alpha$, donc

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = (\alpha^2 - 3\alpha + 2)x^\alpha$$

— **Équation indicelle** : $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$, soit $\alpha = 1$ ou $\alpha = 2$.

— **Base** : x et x^2 ne sont pas proportionnelles (wronskien $x \cdot 2x - 1 \cdot x^2 = x^2 \neq 0$).

L'équation normalisée $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ a un espace de solutions de dimension 2 :

— **Solutions** : $y = \lambda x + \mu x^2$.

Réponse. $y = \lambda x + \mu x^2$.

Correction de l'exercice 4 - Équation d'Euler : racines complexes

- **Dérivées** : $y(x) = z(\ln x)$, donc $y'(x) = \frac{z'(t)}{x}$ et $y''(x) = \frac{z''(t) - z'(t)}{x^2}$, avec $t = \ln x$.
- **Substitution** : $x^2 y'' + xy' = z'' - z' + z' = z''$, et l'équation devient

$$z'' + z = 0 \Leftrightarrow z(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t$$
- **Retour à x** : $y(x) = \lambda \cos(\ln x) + \mu \sin(\ln x)$.
- Ces solutions oscillent de plus en plus vite quand $x \rightarrow 0^+$, et de plus en plus lentement quand $x \rightarrow +\infty$: c'est l'échelle logarithmique.

Réponse. $y = \lambda \cos(\ln x) + \mu \sin(\ln x)$.

Correction de l'exercice 5 - Équation d'Euler : racine double

Avec $x = e^t$ et $z(t) = y(e^t)$: $x^2 y'' - xy' + y = z'' - z' - z' + z$, donc

$$z'' - 2z' + z = 0$$

- **Caractéristique** : $(r-1)^2$, racine double 1 : $z = (\lambda + \mu t)e^t$.
- **Retour** : $y(x) = x(\lambda + \mu \ln x)$.
- **Remarque** : l'essai x^α ne donne que $\alpha = 1$ (racine double de $\alpha^2 - 2\alpha + 1$). La seconde solution $x \ln x$ est l'analogue de te^t pour les coefficients constants.

Réponse. $y = x(\lambda + \mu \ln x)$.

Correction de l'exercice 6 - Deux solutions évidentes

- **Polynôme** $y = ax + b$: $0 - (x+1)a + ax + b = b - a$, nul pour $b = a$: $y = x + 1$ convient.
- **Exponentielle** $y = e^{mx}$: $(m^2 x - (x+1)m + 1)e^{mx} = ((m^2 - m)x + 1 - m)e^{mx}$, nul pour $m = 1$: $y = e^x$ convient.
- **Indépendance** : $W = (x+1)e^x - e^x = xe^x \neq 0$ sur $]0; +\infty[$. Comme l'équation normalisée $(y'' - \frac{x+1}{x}y' + \frac{1}{x}y = 0)$ a un espace de solutions de dimension 2 :

$$y(x) = \lambda(x+1) + \mu e^x$$

Réponse. $y = \lambda(x+1) + \mu e^x$.

Correction de l'exercice 7 - Faire disparaître un terme

- **Dérivées** : $y' = (z' - 2xz)e^{-x^2}$ et $y'' = (z'' - 4xz' + (4x^2 - 2)z)e^{-x^2}$.
- **Substitution** (on divise par $e^{-x^2} > 0$) :

$$z'' - 4xz' + (4x^2 - 2)z + 4xz' - 8x^2 z + (4x^2 + 2)z = z'' = 0$$
- Donc $z = \lambda + \mu x$ et $y(x) = (\lambda + \mu x)e^{-x^2}$.
- **Contrôle** avec $y = (2 - 3x)e^{-x^2}$ en $x = 1,3$: le membre de gauche, calculé numériquement, vaut 0 à 10^{-7} près ✓

Réponse. $y = (\lambda + \mu x)e^{-x^2}$.

Correction de l'exercice 8 - Changement de variable tangente

- **Dérivées** : $y' = \frac{z'}{1+x^2}$ et $y'' = \frac{z''}{(1+x^2)^2} - \frac{2xz'}{(1+x^2)^2}$.
- **Substitution** : $(1+x^2)^2 y'' = z'' - 2xz'$ et $2x(1+x^2)y' = 2xz'$, donc

$$z'' + z = 0 \Leftrightarrow z(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t$$

— **Retour** : pour $t = \arctan x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$, $\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, d'où

$$y(x) = \frac{\lambda + \mu x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Réponse. $y = \frac{\lambda + \mu x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Correction de l'exercice 9 - Solutions polynomiales

— **Degré** : si y est de degré n et de coefficient dominant $c \neq 0$, le terme de degré n de $y'' - 2xy' + 4y$ vaut $(-2n+4)c$. Il doit être nul : $n = 2$.

— **Recherche** : $y = ax^2 + bx + d$ donne

$$2a - 2x(2ax + b) + 4(ax^2 + bx + d) = 2bx + (2a + 4d)$$

— Nul pour $b = 0$ et $d = -\frac{a}{2}$: $y = a\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$.

— **Solutions polynomiales** : Vect $\left(2x^2 - 1\right)$, une droite, alors que l'espace de toutes les solutions est de dimension 2 (l'autre solution n'est pas polynomiale). C'est le polynôme d'Hermite H_2 , à un facteur près.

Réponse. $y = a(2x^2 - 1)$.

Correction de l'exercice 10 - Parité par l'unicité de Cauchy

Soit $u(x) = y(-x)$. Alors $u'(x) = -y'(-x)$ et $u''(x) = y''(-x)$, donc

$$u''(x) + x^2 u(x) = y''(-x) + (-x)^2 y(-x) = 0$$

— u est solution de la même équation (le coefficient x^2 est pair), avec $u(0) = 1$ et $u'(0) = -y'(0) = 0$.

— u et y ont les mêmes conditions initiales en 0 : par **unicité de Cauchy**, $u = y$, c'est-à-dire que y est paire.

— De même, la solution avec $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ est impaire.

Réponse. $x \mapsto y(-x)$ a les mêmes données de Cauchy.

Correction de l'exercice 11 - L'unique solution périodique

— **Particulière** : $y_p = a \cos x + b \sin x$ donne $(a+b) \cos x + (b-a) \sin x = \sin x$, soit $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$:

$$y(x) = \frac{\sin x - \cos x}{2} + C e^{-x}$$

— **Périodicité** : y_p est 2π -périodique, donc y l'est si et seulement si $C e^{-x}$ l'est. Or $C e^{-(x+2\pi)} = C e^{-x}$ pour tout x impose $C = 0$.

— **Unique solution périodique** : $y = \frac{\sin x - \cos x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Toutes les autres s'en rapprochent : c'est le **régime permanent**.

Réponse. $y = \frac{\sin x - \cos x}{2}$.

Correction de l'exercice 12 - Un système différentiel

— **Méthode 1 (élimination)** : $x'' = y' = x$, donc $x = \lambda e^t + \mu e^{-t}$ et $y = x' = \lambda e^t - \mu e^{-t}$. Conditions : $\lambda + \mu = 2$ et $\lambda - \mu = 0$, d'où $\lambda = \mu = 1$.

- **Méthode 2 (découplage)** : $u = x + y$ et $v = x - y$ vérifient $u' = u$ et $v' = -v$, donc $u = 2e^t$ et $v = 2e^{-t}$.

$$x(t) = 2 \operatorname{ch} t, \quad y(t) = 2 \operatorname{sh} t$$

- **Trajectoire** : $x^2 - y^2 = 4$, une branche d'hyperbole. La méthode 2 revient à diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Réponse. $x = 2 \operatorname{ch} t$, $y = 2 \operatorname{sh} t$.

Correction de l'exercice 13 - Le degré du second membre

- **Pourquoi pas degré n** : si y est un polynôme de degré n , $y'' + y'$ est de degré $n - 1$ au plus (le terme en y manque), donc ne peut valoir P .
- **Existence** : on pose $z = y'$; l'équation devient $z' + z = P$. L'application $\Phi: z \mapsto z' + z$ envoie $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même, et elle est injective ($z' = -z$ n'a que la solution nulle parmi les polynômes). En dimension finie, elle est **bijective** : il existe z de degré n tel que $z' + z = P$.
- **Conclusion** : une primitive y de z est de degré $n + 1$:
- $$y'' + y' = z' + z = P$$

- **Exemple** : $y'' + y' = 1$ donne $z = 1$ et $y = x$.

Réponse. $z = y'$; $z \mapsto z' + z$ bijective sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

- a) **Faux** : la fonction nulle n'en fait pas partie ; c'est un plan affine.
- b) **Vrai** : si $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$, alors $W(x_0) = 0$, donc $W = 0$ partout et la famille est liée (à condition que y_1 ne soit pas nulle, y_2 est un multiple de y_1).
- c) **Faux** en général : le coefficient de y'' s'annule en 0, le théorème ne s'applique que sur $]0; +\infty[$ et $] - \infty; 0[$; le raccordement en 0 peut changer la dimension.
- d) **Vrai**, sur $]0; +\infty[$, par $x = e^t$:

$$xy' = z', \quad x^2 y'' = z'' - z'$$

Réponse. a) faux · b) vrai · c) faux · d) vrai.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une équation d'Euler avec second membre

- a) $x^2 y'' - 3xy' + 4y = z'' - 4z' + 4z$, et $x^3 = e^{3t}$. Racine double 2 ; 3 n'est pas racine et $\chi(3) = 1$, d'où $z = (\lambda + \mu t)e^{2t} + e^{3t}$ et
- $$y(x) = x^2(\lambda + \mu \ln x) + x^3$$
- b) $y(1) = \lambda + 1 = 0$; $y'(x) = 2x(\lambda + \mu \ln x) + \mu x + 3x^2$ donne $y'(1) = 2\lambda + \mu + 3 = 0$. Donc $\lambda = \mu = -1$:
- $y(x) = x^3 - x^2 - x^2 \ln x = x^2(x - 1 - \ln x)$.
- c) La concavité de $\ln$ donne $\ln x \leq x - 1$: donc $y(x) \geq 0$, avec égalité seulement en $x = 1$.

Réponse. b) $y = x^2(x - 1 - \ln x)$ · c) car $\ln x \leq x - 1$.