

Plaquette 5 - Modélisation : physique, chimie, biologie

Équations différentielles linéaires — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Modéliser, c'est **traduire une loi** (bilan « entrée – sortie », principe fondamental de la dynamique, loi des mailles) en équation différentielle, avec les unités. On résout, on fixe les constantes par les conditions initiales, puis on **exploite** : valeur limite, constante de temps, instant où un seuil est atteint. On termine toujours par un contrôle de vraisemblance (ordre de grandeur, unités, cas limites).

Exercice 1 - Chute avec frottement

Un parachutiste de masse $m = 80$ kg chute avec un frottement proportionnel à la vitesse : $mv' = mg - kv$, avec $g = 9,8$ m/s², $k = 16$ kg/s et $v(0) = 0$. Déterminer $v(t)$, la vitesse limite, et l'instant où il atteint 95 % de cette vitesse.

Exercice 2 - Établissement du courant dans un circuit RL

Un circuit RL série ($L = 0,5$ H, $R = 10$ Ω) est branché à $t = 0$ sur un générateur de 12 V. L'intensité vérifie $Li' + Ri = E$ et $i(0) = 0$. Déterminer $i(t)$ et la constante de temps.

Exercice 3 - Décharge d'un condensateur

Un condensateur chargé sous 10 V se décharge dans une résistance : $u' + \frac{u}{\tau} = 0$ avec $\tau = 2$ ms. Au bout de combien de temps la tension passe-t-elle sous 1 V ?

Exercice 4 - Rinçage d'une cuve

Une cuve contient 200 L d'eau salée à 50 g/L. On y verse de l'eau pure à 4 L/min et on soutire 4 L/min du mélange homogène. Au bout de combien de temps la concentration descend-elle à 1 g/L ?

Exercice 5 - Perfusion d'un médicament

Un patient reçoit une perfusion de 2 mg/h d'un médicament éliminé proportionnellement à la quantité présente : $q' = 2 - 0,1q$ (t en heures), avec $q(0) = 0$. Déterminer la quantité d'équilibre et le temps pour en atteindre 90 %.

Exercice 6 - Population avec immigration

Une population de 1 000 individus croît au taux de 2 % par an et reçoit 100 immigrants par an : $P' = 0,02P + 100$. Au bout de combien de temps aura-t-elle doublé ?

Exercice 7 – Circuit LC

Dans un circuit LC ($L = 0,1$ H, $C = 10 \mu\text{F}$), la charge vérifie $Lq'' + \frac{q}{C} = 0$. Déterminer la pulsation propre et la fréquence des oscillations, puis $q(t)$ pour $q(0) = q_0$ et $q'(0) = 0$.

Exercice 8 – Résistance critique d'un circuit RLC

On ajoute une résistance R au circuit précédent : $Lq'' + Rq' + \frac{q}{C} = 0$, avec $L = 0,1$ H et $C = 10 \mu\text{F}$. Pour quelle valeur de R le régime est-il critique ? Que se passe-t-il pour $R = 50 \Omega$?

Exercice 9 – Petites oscillations d'un pendule

Pour de petits angles, un pendule de longueur $\ell = 1$ m vérifie $\theta'' + \frac{g}{\ell}\theta = 0$ ($g = 9,81$). On le lâche sans vitesse à $\theta(0) = 0,1$ rad. Déterminer $\theta(t)$ et la période.

Exercice 10 – Oscillateur mécanique amorti

Une masse suspendue à un ressort vérifie $x'' + 2x' + 10x = 0$, avec $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$. Déterminer $x(t)$ et le facteur de réduction de l'amplitude sur une pseudo-période.

Exercice 11 – Méthode d'Euler

On approche la solution de $y' = y$, $y(0) = 1$, par la méthode d'Euler.

- Avec le pas $h = 0,1$, calculer l'approximation de $y(0,5)$.
- Même question avec $h = 0,05$. Comparer les erreurs.

Exercice 12 – Heure du décès

Un corps est découvert à 10 h à 30°C , puis mesuré à 25°C à 12 h, dans une pièce à 20°C . En admettant la loi de Newton et une température de 37°C au décès, estimer l'heure du décès.

Exercice 13 – Culture bactérienne

Une population bactérienne vérifie $N' = kN$ et double toutes les 20 minutes. Combien de temps faut-il pour passer de 1 000 à un million de bactéries ?

Exercice 14 – Un capital qu'on entame

Un capital de 100 000 € rapporte 3 % par an (intérêts continus) et l'on y prélève 6 000 € par an, de façon continue : $C' = 0,03C - 6\,000$. Quand le capital sera-t-il épuisé ? Quel prélèvement le laisserait constant ?

Exercice 15 - Synthèse : régime transitoire et régime permanent

Un oscillateur forcé vérifie $x'' + 2x' + 5x = 10 \cos t$, avec $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.

- a) Déterminer la solution particulière de la forme $a \cos t + b \sin t$ (passer par les complexes).
- b) Déterminer $x(t)$.
- c) À partir de quand le régime transitoire a-t-il une amplitude inférieure à 1 % de celle du régime permanent ?