

Plaquette 2 - Ordre 1 à coefficients variables et raccordements

Équations différentielles linéaires — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

On **normalise** l'équation ($y' + a(x)y = b(x)$) sur un intervalle où le coefficient de y' ne s'annule pas, on résout l'homogène avec une primitive de a , puis on trouve une solution particulière (forme évidente, dérivée d'un produit reconnue, ou variation de la constante). Quand le coefficient de y' s'annule en un point, on résout de chaque côté, puis on **raccorde** : continuité, puis dérivabilité au point singulier.

Exercice 1 - Homogène à coefficient variable

Résoudre $y' + 2xy = 0$ avec $y(0) = 3$.

Exercice 2 - Solution particulière évidente

Résoudre $y' + 2xy = 2x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 - Reconnaître une dérivée de produit

Résoudre $(1 + x^2)y' + 2xy = 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 - Variation de la constante

Résoudre $y' - \frac{y}{x} = x^2$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 5 - Un coefficient trigonométrique

Résoudre $y' + y \tan x = \cos x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, avec $y(0) = 3$.

Exercice 6 - Une intégration par parties

Résoudre $y' - \frac{2}{x}y = x^2 \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 7 - Problème de Cauchy avec un logarithme

Résoudre $xy' + y = \ln x$ sur $]0; +\infty[$, avec $y(1) = 0$.

Exercice 8 - Une solution qui s'annule

Soit a continue sur un intervalle I et y une solution de $y' = a(x)y$ sur I . Montrer que si y s'annule en un point x_0 , alors y est nulle sur I .

Exercice 9 - Raccordement : un espace de dimension 2

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de $xy' - 2y = 0$.

Exercice 10 - Raccordement : une seule solution

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de $xy' + y = 1$.

Exercice 11 - Raccordement : une constante commune

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de $xy' - y = x^2$.

Exercice 12 - Se ramener à une équation linéaire

On cherche les solutions y de $y' + y = y^2$ qui **ne s'annulent pas** sur un intervalle I . En posant $z = \frac{1}{y}$, trouver une équation linéaire vérifiée par z et en déduire y .

Exercice 13 - Une résonance d'ordre 1

Résoudre $y' + y = e^{-x}$ et déterminer la limite des solutions en $+\infty$.

Exercice 14 - Vrai ou faux ?

- a) Les solutions sur $]0; +\infty[$ de $y' = \frac{y}{x}$ forment une droite vectorielle.
- b) Deux solutions distinctes de $y' + a(x)y = b(x)$ peuvent se croiser.
- c) La différence de deux solutions de $y' + a(x)y = b(x)$ est solution de l'homogène.
- d) Toute solution de $y' = y \sin x$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15 - Synthèse : une cuve qui se remplit

Une cuve contient 100 L d'eau pure. On y verse 3 L/min de saumure à 20 g/L et on soutire 2 L/min du mélange (supposé homogène). On note $Q(t)$ la masse de sel (en g) à l'instant t (en min).

- a) Justifier que $Q' = 60 - \frac{2Q}{100+t}$.
- b) Résoudre avec $Q(0) = 0$.
- c) Quelle est la concentration au bout de 100 minutes ?