

**Plaquette 1 - Ordre 1, ordre 2 à
coefficients constants et modélisation**
Équations différentielles linéaires — Licence 1 (L1)
Exercices

Méthode

On résout $y' = a(x)y + b(x)$ par **homogène + particulière** (ou variation de la constante), l'ordre 2 par **équation caractéristique**, et l'on applique ces outils à des modèles concrets (décroissance, oscillations, circuits).

Exercice 1 - Équation homogène d'ordre 1

Résoudre $y' + 3y = 0$ avec $y(0) = 5$.

Exercice 2 - Second membre constant

Résoudre $y' - 2y = 6$.

Exercice 3 - Second membre polynomial

Résoudre $y' + y = x^2$.

Exercice 4 - Coefficient non constant

Résoudre $xy' + 2y = x^3$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 5 - Variation de la constante

Résoudre $y' + y = \frac{1}{1 + e^x}$.

Exercice 6 - Ordre 2, discriminant positif

Résoudre $y'' - 5y' + 6y = 0$ avec $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Exercice 7 - Ordre 2, racine double

Résoudre $y'' + 2y' + y = 0$ avec $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Exercice 8 - Ordre 2, discriminant négatif

Résoudre $y'' + 9y = 0$ avec $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

Exercice 9 - Résonance

Résoudre $y'' - y = e^x$.

Exercice 10 - Décroissance radioactive

Le carbone 14 a une demi-vie de 5 730 ans. Un échantillon contient 30 % du carbone 14 initial : quel est son âge ?

Exercice 11 - Circuit RC

Dans un circuit RC série avec $R = 1\,000\ \Omega$, $C = 10^{-3}\text{ F}$ et $E = 5\text{ V}$, la tension aux bornes du condensateur vérifie $RCu' + u = E$ avec $u(0) = 0$. Déterminer $u(t)$ et le temps pour atteindre 4 V.

Exercice 12 - Oscillateur amorti

Résoudre $y'' + 4y' + 13y = 0$ et identifier le régime.

Exercice 13 - Loi de refroidissement de Newton

Un café à $80\text{ }^{\circ}\text{C}$ est posé dans une pièce à $20\text{ }^{\circ}\text{C}$. Sa température vérifie $T' = -k(T - 20)$ (t en minutes). Au bout de 10 minutes, il est à $50\text{ }^{\circ}\text{C}$. Quand sera-t-il à $30\text{ }^{\circ}\text{C}$?

Exercice 14 - Second membre trigonométrique

Résoudre $y' + y = \cos x$ avec $y(0) = 0$.

Exercice 15 - Synthèse : modèle logistique linéarisé

Une population vérifie $P' = 0,03P - 60$ (individus par an), avec $P(0) = 1\,500$.

- Résoudre.
- La population survit-elle ?