

Plaquette 3 – Ordre 2 : seconds membres et conditions

Équations différentielles linéaires — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Pour $ay'' + by' + cy = f(x)$: on résout l'homogène par l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière adaptée au second membre, on additionne, et **seulement ensuite** on applique les conditions. Un second membre $P(x)e^{mx}$ appelle un essai $Q(x)e^{mx}$, avec Q de degré $\deg P$, $\deg P + 1$ ou $\deg P + 2$ selon que m n'est pas racine, racine simple ou racine double. Les cosinus et sinus se traitent en passant par $e^{i\omega x}$.

Exercice 1 – Second membre constant

Résoudre $y'' - 3y' + 2y = 4$.

Exercice 2 – Second membre polynomial

Résoudre $y'' + y' - 2y = x^2$.

Exercice 3 – Exponentielle non résonante

Résoudre $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$.

Exercice 4 – Résonance sur une racine double

Résoudre $y'' - 2y' + y = e^x$.

Exercice 5 – Polynôme fois exponentielle

Résoudre $y'' - y' = xe^x$.

Exercice 6 – Un cosinus sans résonance

Résoudre $y'' + y = \cos 2x$.

Exercice 7 – Passage par les complexes

Résoudre $y'' + 2y' + 2y = 5 \cos x$.

Exercice 8 – Un sinus résonant

Résoudre $y'' + y = \sin x$.

Exercice 9 – Principe de superposition

Résoudre $y'' - y = x + e^{2x}$.

Exercice 10 - Problème de Cauchy

Résoudre $y'' + 4y = 8$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 11 - Deux conditions aux bords

Pour l'équation $y'' + y = 0$, combien y a-t-il de solutions vérifiant :

- a) $y(0) = 0$ et $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$?
- b) $y(0) = 0$ et $y(\pi) = 0$?
- c) $y(0) = 0$ et $y(\pi) = 1$?

Exercice 12 - Retrouver l'équation

Déterminer des réels b et c tels que $x \mapsto e^x \cos x$ soit solution de $y'' + by' + cy = 0$.
Donner alors toutes les solutions.

Exercice 13 - Stabilité selon un paramètre

Pour quelles valeurs du réel a toutes les solutions de $y'' + ay' + y = 0$ tendent-elles vers 0 en $+\infty$?

Exercice 14 - Conservation de l'énergie

Soit y une solution de $y'' + \omega^2 y = 0$ ($\omega > 0$). Montrer que $E = y'^2 + \omega^2 y^2$ est constante, puis que $|y| \leq \frac{\sqrt{E}}{\omega}$.

Exercice 15 - Synthèse : ressort forcé et résonance

Une masse attachée à un ressort vérifie $x'' + 4x = \cos(\omega t)$, avec $x(0) = x'(0) = 0$.

- a) Résoudre pour $\omega \neq 2$.
- b) Résoudre pour $\omega = 2$ et décrire le mouvement.
- c) Vérifier que la solution de b) est la limite de celle de a) quand $\omega \rightarrow 2$.