

Plaquette 4 – Structure des solutions et changements de variable

Équations différentielles linéaires — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Une équation linéaire homogène a pour solutions un **espace vectoriel** (de dimension n pour l'ordre n , sur un intervalle où l'on peut normaliser), et l'équation complète un **espace affine** dirigé par lui. Quand les coefficients ne sont pas constants, on cherche une **solution évidente** (polynôme, exponentielle, puissance x^α) ou un **changement de variable** ou de fonction qui ramène à des coefficients constants : $x = e^t$ pour les équations d'Euler, $y = ze^{g(x)}$ pour faire disparaître un terme.

Exercice 1 – Espace vectoriel, espace affine

Soit S_h l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + y = 0$ et S celui de $y'' + y = x$.

- Montrer que S_h est un sous-espace vectoriel de $C^2(\mathbb{R})$.
- S est-il un espace vectoriel ? Décrire S .

Exercice 2 – Wronskien et base de solutions

Soit y_1, y_2 deux solutions sur I de $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$, et $W = y_1y_2' - y_1'y_2$.

- Montrer que $W' = -a(x)W$.
- Calculer W pour $\cos$ et $\sin$, solutions de $y'' + y = 0$.

Exercice 3 – Équation d'Euler : racines réelles

Résoudre $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ sur $]0; +\infty[$ en cherchant des solutions de la forme x^α .

Exercice 4 – Équation d'Euler : racines complexes

Résoudre $x^2y'' + xy' + y = 0$ sur $]0; +\infty[$ en posant $x = e^t$, $z(t) = y(e^t)$.

Exercice 5 – Équation d'Euler : racine double

Résoudre $x^2y'' - xy' + y = 0$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 6 – Deux solutions évidentes

On considère $xy'' - (x+1)y' + y = 0$ sur $]0; +\infty[$. Chercher une solution polynomiale de degré 1 et une solution exponentielle, puis donner toutes les solutions.

Exercice 7 – Faire disparaître un terme

Résoudre $y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = 0$ en posant $y = ze^{-x^2}$.

Exercice 8 – Changement de variable tangente

Résoudre $(1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2)y' + y = 0$ en posant $x = \tan t$, c'est-à-dire $y(x) = z(\arctan x)$.

Exercice 9 – Solutions polynomiales

Déterminer les solutions polynomiales de $y'' - 2xy' + 4y = 0$.

Exercice 10 – Parité par l'unicité de Cauchy

Soit y la solution de $y'' + x^2 y = 0$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Montrer que y est paire, sans résoudre l'équation.

Exercice 11 – L'unique solution périodique

Montrer que $y' + y = \sin x$ admet une unique solution 2π -périodique, et la déterminer.

Exercice 12 – Un système différentiel

Résoudre le système $x' = y$, $y' = x$ (fonctions de t), avec $x(0) = 2$ et $y(0) = 0$.

Exercice 13 – Le degré du second membre

Montrer que $y'' + y' = P(x)$, avec P polynôme de degré n , admet une solution polynomiale de degré $n + 1$, mais aucune de degré n .

Exercice 14 – Vrai ou faux ?

- a) Les solutions de $y'' + y = 1$ forment un espace vectoriel.
- b) Si y_1 et y_2 sont deux solutions de $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ qui s'annulent au même point, elles sont proportionnelles.
- c) L'équation $x^2 y'' + y = 0$ a un espace de solutions de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.
- d) Toute équation d'Euler se ramène à une équation à coefficients constants.

Exercice 15 – Synthèse : une équation d'Euler avec second membre

On considère $x^2 y'' - 3xy' + 4y = x^3$ sur $]0; +\infty[$.

- a) Avec $x = e^t$, écrire l'équation vérifiée par $z(t) = y(e^t)$ et la résoudre.
- b) Déterminer la solution telle que $y(1) = 0$ et $y'(1) = 0$.
- c) Montrer que cette solution est positive.