

Fiche de révision – Équations différentielles linéaires

Licence 1 – Ordre 1, ordre 2, Cauchy, solutions particulières et résonance

Structure à retenir

Pour une équation linéaire

$$L(y) = f,$$

on résout d'abord l'homogène $L(y) = 0$, puis on trouve *une* solution particulière y_p :

$$y = y_h + y_p.$$

Si y_1, y_2 sont solutions homogènes, toute combinaison linéaire $\lambda y_1 + \mu y_2$ l'est encore.

$\Delta > 0$: racines $r_1 \neq r_2$

$$y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

$\Delta = 0$: racine double r_0

$$y_h = (C_1 + C_2 x) e^{r_0 x}.$$

$\Delta < 0$: racines $\alpha \pm i\beta$

$$y_h = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Ordre 1 : $y' + a(x)y = b(x)$

Sur un intervalle I , avec a, b continues. Soit A une primitive de a .

Homogène

$$y_h = C e^{-A(x)}.$$

Facteur intégrant : $e^{A(x)}$ car

$$(e^A y)' = e^A (y' + ay).$$

Formule générale :

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(C + \int_{x_0}^x e^{A(t)} b(t) dt \right).$$

Variation de la constante : remplacer C dans $C e^{-A}$ par une fonction $C(x)$.

Problème de Cauchy

$$y(x_0) = y_0$$

fixe une unique valeur de C . Si a, b sont continues, il existe une unique solution sur I .

Méthode :

1. normaliser le coefficient de y' à 1 ;
2. calculer A avec $A' = a$;
3. écrire y_h ;
4. trouver y_p ;
5. appliquer la condition initiale à la fin.

Ordre 2 homogène

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad a \neq 0.$$

Équation caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0, \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Solutions particulières

Pour

$$ay'' + by' + cy = f(x),$$

choisir une forme de y_p adaptée à f .

$f(x)$	essai sans résonance
$P_m(x)$	$Q_m(x)$
$P_m(x)e^{\lambda x}$	$Q_m(x)e^{\lambda x}$
$P_m \cos \omega x + Q_m \sin \omega x$	$A_m \cos \omega x + B_m \sin \omega x$

Résonance : piège majeur

Si l'essai choisi est déjà lié à une solution de l'homogène, il faut le multiplier par une puissance de x .

Pour un second membre $P_m(x)e^{\lambda x}$:

$$y_p = x^s Q_m(x) e^{\lambda x},$$

où s est la multiplicité de λ comme racine de l'équation caractéristique.

Ordre 2 : $s = 0, 1$ ou 2 .

Forme générale :

$$\begin{aligned} f &= e^{\alpha x} (P_m \cos \beta x + Q_m \sin \beta x) \\ \Rightarrow y_p &= x^s e^{\alpha x} (A_m \cos \beta x + B_m \sin \beta x). \end{aligned}$$

Exemple :

$$y'' - y = e^x.$$

Comme 1 est racine simple de $r^2 - 1$, on ne prend pas Ae^x mais

$$y_p = Axe^x.$$

On obtient $A = \frac{1}{2}$.

Cauchy d'ordre 2

Deux conditions initiales sont nécessaires :

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = v_0.$$

Pour $a \neq 0$ et f continue, elles déterminent une unique solution.

Procédure :

1. écrire $y = y_h + y_p$;
2. calculer y' ;
3. substituer $x = x_0$;
4. résoudre le système en C_1, C_2 .

Exemples flash

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$

$$(r-1)(r-2) = 0 \Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

2. $y'' - 2y' + y = 0$

$$(r-1)^2 = 0 \Rightarrow y = (C_1 + C_2 x) e^x.$$

3. $y'' + 4y = 0$

$$r = \pm 2i \Rightarrow y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

4. $y'' - y = \cos x$

$$y_p = A \cos x + B \sin x \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, \quad B = 0.$$

Erreurs à éviter

- oublier la solution particulière quand $f \neq 0$;
- écrire $Ce^{-a(x)}$ au lieu de $Ce^{-A(x)}$ avec $A' = a$;
- oublier le facteur x en cas de résonance ;
- oublier $xe^{r_0 x}$ pour une racine double ;
- chercher les constantes avant d'avoir la solution générale ;
- ne pas vérifier la solution dans l'équation initiale.

Checklist examen

1. Quel est l'ordre ? L'équation est-elle linéaire ?
2. Quelle est l'équation homogène ?
3. Ordre 1 : quel est A tel que $A' = a$?
4. Ordre 2 : quelles sont les racines caractéristiques ?
5. Quelle forme choisir pour y_p ?
6. Y a-t-il résonance ?
7. Écrire $y = y_h + y_p$.
8. Appliquer les données de Cauchy.
9. Vérifier par substitution.

Formule-clé ordre 1

$$y' + ay = b \Rightarrow y = e^{-A} \left(C + \int e^A b \right), \quad A' = a.$$