

Équations différentielles linéaires en L1 maths

Ordre 1, ordre 2 à coefficients constants, Cauchy et résonance

Idée directrice. Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction. En L1, on apprend surtout à reconnaître une équation linéaire, à résoudre d'abord l'équation homogène, puis à ajouter une solution particulière, et enfin à utiliser les conditions initiales pour déterminer les constantes.

1. Vocabulaire et structure générale

Équation différentielle

Une **équation différentielle** relie une fonction inconnue y à certaines de ses dérivées. Son **ordre** est l'ordre maximal de dérivation qui intervient.

Exemples :

$$y' + 2y = x \quad \text{est d'ordre 1,} \quad y'' - 3y' + 2y = e^x \quad \text{est d'ordre 2.}$$

Équation linéaire

Une équation différentielle est **linéaire** lorsque y et ses dérivées apparaissent au premier degré et ne sont pas multipliées entre elles. Par exemple,

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

est linéaire. En revanche, $yy' = 1$, $(y')^2 + y = 0$ et $y' + y^2 = 0$ ne le sont pas.

Équation homogène associée

À une équation linéaire

$$L(y) = g,$$

on associe l'équation **homogène**

$$L(y) = 0.$$

Principe de superposition

Si y_1 et y_2 sont solutions de l'équation homogène $L(y) = 0$, alors, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\lambda y_1 + \mu y_2$$

est encore solution de l'équation homogène.

Si y_p est une solution particulière de $L(y) = g$, alors toutes les solutions de l'équation complète sont de la forme

$$y = y_h + y_p,$$

où y_h parcourt l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

Piège classique

On ne peut pas additionner arbitrairement deux solutions de l'équation *avec second membre* : la superposition concerne d'abord l'équation homogène. Pour le second membre, on utilise la linéarité de L pour décomposer g si cela simplifie la recherche d'une solution particulière.

2. Équations linéaires du premier ordre

On travaille sur un intervalle I et l'on considère

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x),$$

où a et b sont continues sur I .

2.1. Équation homogène

L'équation homogène associée est

$$y' + a(x)y = 0.$$

Soit A une primitive de a sur I . Alors

$$(e^{A(x)}y(x))' = e^{A(x)}(y'(x) + a(x)y(x)).$$

Ainsi, pour une solution homogène,

$$(e^A y)' = 0.$$

Donc $e^A y = C$ et

$$y_h(x) = Ce^{-A(x)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemple

Résoudre $y' + 2xy = 0$. Une primitive de $a(x) = 2x$ est $A(x) = x^2$. Donc

$$y(x) = Ce^{-x^2}.$$

2.2. Facteur intégrant et variation de la constante

On cherche maintenant une solution de

$$y' + ay = b.$$

En multipliant par e^A ,

$$(e^A y)' = e^A b.$$

En intégrant entre un point fixé $x_0 \in I$ et x ,

$$e^{A(x)}y(x) = C + \int_{x_0}^x e^{A(t)}b(t) dt.$$

D'où la formule générale :

Solutions d'une équation linéaire d'ordre 1

Si $A' = a$, toutes les solutions de

$$y' + a(x)y = b(x)$$

sur I sont

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(C + \int_{x_0}^x e^{A(t)} b(t) dt \right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Le choix de x_0 ne modifie pas l'ensemble des solutions : il change seulement la constante C .

Cette méthode est aussi appelée **variation de la constante**. On part de $y_h = Ce^{-A}$ et l'on remplace la constante C par une fonction $C(x)$.

Résoudre $y' + a(x)y = b(x)$

1. Vérifier que l'équation est sous la forme normalisée $y' + ay = b$.
2. Calculer une primitive A de a .
3. Écrire $y_h = Ce^{-A}$.
4. Chercher y_p par facteur intégrant ou variation de la constante.
5. Écrire $y = y_h + y_p$.
6. S'il y a une condition initiale, l'utiliser *à la fin* pour déterminer C .

Équation complète

Résoudre

$$y' - y = e^{2x}.$$

Ici $a = -1$, donc $A = -x$ et $y_h = Ce^x$. Pour une solution particulière, on peut poser $y_p = ke^{2x}$:

$$y_p' - y_p = (2k - k)e^{2x} = ke^{2x}.$$

On choisit $k = 1$. Ainsi

$$y(x) = Ce^x + e^{2x}.$$

2.3. Problème de Cauchy d'ordre 1

Définition

Un **problème de Cauchy** d'ordre 1 consiste à résoudre l'équation avec une condition initiale

$$y(x_0) = y_0.$$

Existence et unicité en ordre 1

Si a et b sont continues sur un intervalle I , alors, pour tout $x_0 \in I$ et tout $y_0 \in \mathbb{R}$, le problème

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur I .

En prenant dans la formule générale l'intégrale à partir de x_0 , on obtient directement

$$y(x) = e^{A(x_0)-A(x)}y_0 + e^{-A(x)} \int_{x_0}^x e^{A(t)}b(t) \, dt.$$

Exemple

Résoudre

$$\begin{cases} y' + y = x, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

On a $A(x) = x$. Donc

$$y(x) = e^{-x} \left(C + \int_0^x te^t \, dt \right).$$

Or $\int te^t \, dt = (t-1)e^t$, d'où

$$y(x) = x - 1 + (C+1)e^{-x}.$$

La condition $y(0) = 2$ donne $C = 2$. Ainsi

$$y(x) = x - 1 + 3e^{-x}.$$

3. Équations d'ordre 2 à coefficients constants

On considère

$$ay'' + by' + cy = f(x), \quad a \neq 0,$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont constants.

3.1. Équation homogène et équation caractéristique

Pour l'équation homogène

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

on cherche des solutions sous la forme $y = e^{rx}$. On obtient

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0.$$

Comme $e^{rx} \neq 0$, il faut résoudre

$$ar^2 + br + c = 0.$$

C'est l'équation caractéristique.

Trois cas pour l'équation homogène

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta > 0$: deux racines réelles distinctes r_1, r_2 ,

$$y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

2. Si $\Delta = 0$: une racine double $r_0 = -\frac{b}{2a}$,

$$y_h = (C_1 + C_2 x) e^{r_0 x}.$$

3. Si $\Delta < 0$: deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$ avec $\beta > 0$,

$$y_h = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)).$$

Trois modèles

— $y'' - 3y' + 2y = 0$: $r^2 - 3r + 2 = (r - 1)(r - 2)$, donc

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

— $y'' - 2y' + y = 0$: $(r - 1)^2 = 0$, donc

$$y = (C_1 + C_2 x) e^x.$$

— $y'' + 4y = 0$: $r = \pm 2i$, donc

$$y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).$$

Piège classique

Dans le cas d'une racine double r_0 , les deux fonctions $e^{r_0 x}$ et $x e^{r_0 x}$ sont nécessaires. Écrire seulement $C e^{r_0 x}$ ferait perdre une constante et ne donnerait pas toutes les solutions.

4. Recherche d'une solution particulière en ordre 2

Une fois y_h connue, il reste à trouver **une** solution particulière y_p de

$$a y'' + b y' + c y = f(x).$$

La solution générale sera alors

$$y = y_h + y_p.$$

4.1. Second membre polynomial

Si $f = P_m$ est un polynôme de degré m , on cherche souvent y_p sous la forme d'un polynôme de même degré. Si cette forme rencontre une solution homogène, il faut la multiplier par une puissance de x .

Exemple

Résoudre

$$y'' - y = x.$$

L'équation homogène a pour racines ± 1 :

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Cherchons $y_p = Ax + B$. Alors $y_p'' = 0$ et

$$y_p'' - y_p = -Ax - B.$$

Pour obtenir x , il faut $A = -1$ et $B = 0$. Ainsi

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x.$$

4.2. Second membre exponentiel et résonance

Si

$$f(x) = P_m(x)e^{\lambda x},$$

on cherche en l'absence de résonance

$$y_p(x) = Q_m(x)e^{\lambda x},$$

où Q_m est un polynôme de degré m à coefficients inconnus.**Résonance**Si λ est racine de l'équation caractéristique, l'essai $Q_m(x)e^{\lambda x}$ appartient en partie à l'espace des solutions homogènes et ne peut pas fonctionner tel quel.On multiplie alors l'essai par x^s , où s est la multiplicité de λ comme racine de l'équation caractéristique :

$$y_p = x^s Q_m(x)e^{\lambda x}.$$

Résonance simple

Résoudre

$$y'' - y = e^x.$$

L'équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$ admet $r = 1$ comme racine simple. L'essai Ae^x est donc impossible : c'est déjà une solution homogène.

On essaie

$$y_p = Axe^x.$$

Alors

$$y_p' = A(1+x)e^x, \quad y_p'' = A(x+2)e^x,$$

et donc

$$y_p'' - y_p = 2Ae^x.$$

Ainsi $A = \frac{1}{2}$ et

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{x}{2} e^x.$$

4.3. Second membre trigonométrique

Pour

$$f(x) = P_m(x) \cos(\omega x) + Q_m(x) \sin(\omega x),$$

on cherche une solution particulière sous la forme

$$y_p = A_m(x) \cos(\omega x) + B_m(x) \sin(\omega x),$$

où A_m et B_m sont des polynômes du même degré maximal que P_m, Q_m .

Si $\pm i\omega$ sont racines de l'équation caractéristique, on multiplie l'essai par la puissance de x imposée par la multiplicité : c'est encore le phénomène de résonance.

Forçage trigonométrique sans résonance

Résoudre

$$y'' - y = \cos x.$$

L'homogène donne $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Cherchons

$$y_p = A \cos x + B \sin x.$$

Alors $y_p'' = -A \cos x - B \sin x$, donc

$$y_p'' - y_p = -2A \cos x - 2B \sin x.$$

On veut $\cos x$, d'où $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$. Finalement

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \cos x.$$

4.4. Forme générale exponentielle-trigonométrique

Pour un second membre

$$e^{\alpha x} (P_m(x) \cos(\beta x) + Q_m(x) \sin(\beta x)),$$

on cherche

$$y_p = x^s e^{\alpha x} (A_m(x) \cos(\beta x) + B_m(x) \sin(\beta x)),$$

où s est la multiplicité de $\alpha + i\beta$ comme racine de l'équation caractéristique ($s = 0, 1$ ou 2 pour une équation du second ordre).

Méthode des coefficients indéterminés

1. Résoudre l'équation homogène et écrire le polynôme caractéristique.
2. Identifier la forme du second membre.
3. Proposer une forme de y_p de même type.
4. Vérifier la résonance avec les racines caractéristiques ; multiplier par x^s si nécessaire.
5. Dériver, substituer dans l'équation et identifier les coefficients.
6. Ajouter y_h et y_p .

5. Problèmes de Cauchy en ordre 2

Un problème de Cauchy d'ordre 2 impose deux conditions initiales, par exemple

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = v_0.$$

Existence et unicité pour les coefficients constants

Soit $a \neq 0$ et f continue. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et tous $y_0, v_0 \in \mathbb{R}$, le problème

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(x), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = v_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Oscillateur harmonique avec données initiales

Résoudre

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

L'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$. Donc

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Puis

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Les conditions initiales donnent $C_1 = 2$ et $C_2 = -1$. Ainsi

$$y(x) = 2 \cos x - \sin x.$$

Utiliser les conditions initiales efficacement

Ne déterminer les constantes qu'après avoir écrit la solution générale. En ordre 2, calculer ensuite y' puis substituer $x = x_0$ dans les deux équations obtenues. On résout alors un système linéaire en C_1, C_2 .

6. Résolution par décomposition du second membre

La linéarité permet de séparer un second membre compliqué. Si

$$L(y) = f_1 + f_2$$

et si $y_{p,1}$ vérifie $L(y_{p,1}) = f_1$ tandis que $y_{p,2}$ vérifie $L(y_{p,2}) = f_2$, alors

$$y_p = y_{p,1} + y_{p,2}$$

est une solution particulière pour $f_1 + f_2$.

Exemple

Pour

$$y'' + y = x + \cos(2x),$$

on peut chercher séparément une solution particulière $y_{p,1}$ pour x et une autre $y_{p,2}$ pour $\cos(2x)$, puis poser $y_p = y_{p,1} + y_{p,2}$.

7. Vérifier une solution

Une expression n'est une solution que si elle satisfait réellement l'équation sur l'intervalle considéré.

Checklist de vérification

Pour vérifier une solution candidate y :

1. calculer les dérivées nécessaires ;
2. remplacer y, y', y'' dans le membre de gauche ;
3. simplifier jusqu'à retrouver exactement le second membre ;
4. vérifier les conditions initiales s'il y en a ;
5. vérifier que l'expression est définie sur l'intervalle étudié.

Piège classique

Résoudre l'équation caractéristique ne donne que la solution de l'**équation homogène**. Si le second membre n'est pas nul, il faut encore chercher une solution particulière.

8. Pièges classiques et bonnes pratiques

1. Oublier de normaliser en ordre 1

Une équation comme

$$2y' + xy = 1$$

doit d'abord être divisée par 2 :

$$y' + \frac{x}{2}y = \frac{1}{2}.$$

Le coefficient de y' doit être 1 avant d'utiliser la formule standard.

2. Confondre A et a

Dans $y' + ay = b$, si $A' = a$, la solution homogène est

$$y_h = Ce^{-A},$$

et non Ce^{-a} en général.

3. Ignorer la résonance

Si le second membre est de même type qu'une solution homogène, l'essai naïf est annihilé par l'opérateur différentiel. Il faut le multiplier par x (racine simple) ou x^2 (racine double).

4. Perdre une constante en ordre 2

Une équation linéaire homogène d'ordre 2 possède deux paramètres libres. Si la solution proposée ne comporte qu'une constante, il manque généralement une famille de solutions.

5. Appliquer trop tôt les conditions initiales

Le plus sûr est de résoudre complètement l'équation, puis d'utiliser les conditions initiales pour déterminer les constantes. Cela évite de mélanger résolution et calcul algébrique.

9. Exercices corrigés

Exercice 1 – Ordre 1 avec variation de la constante

Résoudre sur $\mathbb{R}$

$$y' + 2y = x.$$

Correction. L'homogène donne

$$y_h = Ce^{-2x}.$$

Cherchons une solution particulière affine $y_p = ax + b$. Alors

$$a + 2(ax + b) = x.$$

Par identification,

$$2a = 1, \quad a + 2b = 0,$$

donc $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{4}$. Finalement

$$y = Ce^{-2x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}.$$

Exercice 2 – Racine double

Résoudre

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Correction. L'équation caractéristique est

$$r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2.$$

Donc

$$y = (C_1 + C_2x)e^{2x}.$$

Exercice 3 – Résonance trigonométrique

Résoudre

$$y'' + y = \sin x.$$

Correction. L'homogène est

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Le second membre $\sin x$ est résonant. On cherche par exemple

$$y_p = Ax \cos x.$$

On calcule

$$\begin{aligned} y_p' &= A \cos x - Ax \sin x, \\ y_p'' &= -2A \sin x - Ax \cos x. \end{aligned}$$

Donc

$$y_p'' + y_p = -2A \sin x.$$

Il faut $-2A = 1$, donc $A = -\frac{1}{2}$. Ainsi

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2} \cos x.$$

Exercice 4 – Problème de Cauchy

Résoudre

$$\begin{cases} y'' - y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 3. \end{cases}$$

Correction. On a

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \quad y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x}.$$

À $x = 0$:

$$C_1 + C_2 = 1, \quad C_1 - C_2 = 3.$$

Donc $C_1 = 2$ et $C_2 = -1$, d'où

$$y = 2e^x - e^{-x}.$$

10. À savoir absolument

Ordre 1 : si $A' = a$, alors $y' + ay = b$ se résout par le facteur intégrant e^A et $y = e^{-A}(C + \int e^A b)$.

Structure : solution générale = solution homogène + une solution particulière.

Ordre 2 constant : résoudre $ar^2 + br + c = 0$; une racine double impose le facteur $xe^{r_0 x}$, une paire $\alpha \pm i\beta$ conduit à $e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

Second membre : choisir un essai de même type et contrôler systématiquement la résonance.

Cauchy : une donnée initiale en ordre 1, deux en ordre 2 ; elles fixent les constantes.