

Plaque 4 - Dimension, sommes et supplémentaires

Espaces vectoriels — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Somme et intersection. $F + G = \{x + y : x \in F, y \in G\}$ est un sous-espace ; la somme est **directe** si $F \cap G = \{0\}$ (écriture unique).

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) \quad (\text{Grassmann})$$

- **Supplémentaires** : $E = F \oplus G \Leftrightarrow F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E \Leftrightarrow F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$ (en dimension finie).
- Un supplémentaire **existe toujours** (base incomplète) mais n'est **pas unique**.
- **Inclusion et dimension** : $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$ (finie) $\Rightarrow F = G$.
- **Trois sous-espaces** : $F_1 + F_2 + F_3$ est directe si l'écriture est unique, ce qui **ne se réduit pas** à des intersections deux à deux nulles.
- **Décompositions classiques** : fonctions paires $\oplus$ impaires ; matrices symétriques $\oplus$ antisymétriques ; trace nulle $\oplus$ scalaires.

Correction de l'exercice 1 - Formule de Grassmann dans $\mathbb{R}^4$

a) u_1, u_2 non colinéaires : $\dim F = 2$; de même $\dim G = 2$.

b) Forme échelonnée réduite (calcul exact) de la matrice des colonnes : pivots en colonnes 1, 2, 3 et quatrième colonne $(1, 1, 0, 0)^T : v_2 = u_1 + u_2$. Rang 3 :

$$\dim(F + G) = 3$$

c) Grassmann : $\dim(F \cap G) = 2 + 2 - 3 = 1$. Or $v_2 = u_1 + u_2 \in F$ et $v_2 \in G$:

— $F \cap G = \text{Vect}(1, 1, 1, 1)$.

d) $F \cap G \neq \{0\}$: **non** directe. Géométriquement : deux plans de $\mathbb{R}^4$ qui se coupent selon une droite engendrent un espace de dimension 3.

Réponse. $\dim(F + G) = 3$, $\dim(F \cap G) = 1$, $F \cap G = \text{Vect}(1, 1, 1, 1)$; somme non directe.

Correction de l'exercice 2 - Fonctions paires et impaires

a) Si f est paire et impaire : $f(x) = f(-x) = -f(x)$, donc $f(x) = 0$ pour tout x .

b) $g(-x) = g(x)$ et $h(-x) = -h(x)$ par construction, et $g + h = f$. Avec a) :

$$F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = P \oplus I$$

— (Raisonnement par **analyse-synthèse** : si $f = g + h$, alors $f(-x) = g(x) - h(x)$, ce qui impose les formules.)

c) $\exp = \cosh + \sinh$: partie paire $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, partie impaire $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

d) Pairs : combinaisons des X^{2k} ; impairs : des X^{2k+1} . Pour $n = 2m$: $m + 1$ puissances paires et m impaires, total $2m + 1 = n + 1$ ✓ ; pour $n = 2m + 1$: $(m + 1) + (m + 1) = n + 1$ ✓

Réponse. $F = P \oplus I$, $f = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$; $\exp = \cosh + \sinh$.

Correction de l'exercice 3 - Trois droites du plan

- a)** Deux à deux, les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires : intersections nulles.
- b)** $(1, 0) + (0, 1) - (1, 1) = 0$ avec des composantes non nulles dans chaque droite : 0 a une écriture non triviale, la somme **n'est pas directe**.
- c)** La somme est directe $\Leftrightarrow$ la réunion de bases des F_i est **libre** $\Leftrightarrow$ le rang de cette réunion vaut $\sum \dim F_i$.

$$F_1 + F_2 + F_3 \text{ directe} \Leftrightarrow \dim\left(\sum F_i\right) = \sum \dim F_i$$

- d)** $\dim(D_1 + D_2 + D_3) = 2$ alors que $\sum \dim D_i = 3$: pas directe ✓

— **Piège classique** : pour plus de deux sous-espaces, « intersections deux à deux nulles » ne suffit **pas**.

Réponse. Intersections deux à deux nulles mais $(1, 0) + (0, 1) - (1, 1) = 0$: somme non directe ($2 < 3$).

Correction de l'exercice 4 - Supplémentaires d'une droite

- a)** $D \cap P_1 : \lambda(1, 1, 1)$ avec $\lambda = 0$ (troisième coordonnée) : $\{0\}$. Dimensions $1 + 2 = 3$: supplémentaires.

- b)** $\lambda(1, 1, 1) \in P_2 \Leftrightarrow 3\lambda = 0 : D \cap P_2 = \{0\}$, et $1 + 2 = 3$. Autre supplémentaire : **pas d'unicité**.

- c)** $D \oplus P_1 : u = \lambda(1, 1, 1) + (x, y, 0)$; troisième coordonnée : $\lambda = 6$, donc $u = (6, 6, 6) + (-5, -4, 0)$.

— $D \oplus P_2 : \lambda = \frac{1+2+6}{3} = 3 : u = (3, 3, 3) + (-2, -1, 3)$, avec $-2 - 1 + 3 = 0$ ✓

— Les composantes sur D **diffèrent** (6 ou 3) : la projection sur D dépend du supplémentaire choisi.

- d)** $(1, 1, 1) \notin \text{plan} \Leftrightarrow a + b + c \neq 0$. Condition :

$$a + b + c \neq 0$$

Réponse. P_1 et P_2 supplémentaires de D ; $u = (6, 6, 6) + (-5, -4, 0) = (3, 3, 3) + (-2, -1, 3)$; condition $a + b + c \neq 0$.

Correction de l'exercice 5 - Deux plans de l'espace

- a)** $\dim(P_1 + P_2) \leq 3$ et $P_1 + P_2 \neq P_1$ (plans distincts) donc $\dim(P_1 + P_2) = 3$. Grassmann : $\dim(P_1 \cap P_2) = 2 + 2 - 3 = 1$.

- b)** Oui : $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$ et $G = \text{Vect}(e_3, e_4)$ dans $\mathbb{R}^4$: $F \cap G = \{0\}$ et $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

- c)** $\dim(F \cap G) = p + q - \dim(F + G) \geq p + q - n > 0$.

$$p + q > n \Rightarrow F \cap G \neq \{0\}$$

- d)** Les polynômes pairs de $\mathbb{R}_3[X] : \text{Vect}(1, X^2)$, dimension 2 ; ceux qui s'annulent en 1 : dimension 3. $2 + 3 > 4$: intersection non nulle.

— $P = a + bX^2$ avec $a + b = 0 : P = 1 - X^2$ (à un facteur près). Pair ✓, $P(1) = 0$ ✓

Réponse. Deux plans de $\mathbb{R}^3$: une droite ; $p + q > n \Rightarrow F \cap G \neq \{0\}$; en d) $P = 1 - X^2$.

Correction de l'exercice 6 - Polynômes nuls en 0 et 1

- a)** $P(0) = P(1) = 0 \Leftrightarrow X(X-1) \mid P : F = \{X(X-1)Q : Q \in \mathbb{R}_1[X]\}$, base $(X(X-1), X^2(X-1))$,

$\dim F = 2$.

b) $F \cap G$: un polynôme de degré ≤ 1 nul en 0 et 1 est nul. Dimensions $2 + 2 = 4$: $E = F \oplus G$.

c) On cherche $X^3 = P + (aX + b)$ avec $P \in F$: en 0 : $0 = b$; en 1 : $1 = a + b$. Donc la composante sur G vaut X :

$$X^3 = (X^3 - X) + X, \quad X^3 - X = X(X - 1)(X + 1) \in F$$

d) La composante sur G est l'unique polynôme de degré ≤ 1 prenant les **mêmes valeurs** que P en 0 et 1 : le polynôme d'interpolation (la **corde**) de P aux nœuds 0 et 1.

Réponse. $F = \text{Vect}(X(X - 1), X^2(X - 1))$; $E = F \oplus G$; $X^3 = (X^3 - X) + X$.

Correction de l'exercice 7 - Trace nulle et matrices scalaires

a) λI_n est de trace $n\lambda$; trace nulle $\Rightarrow \lambda = 0$.

b) $\dim T = n^2 - 1$ (hyperplan) et $\dim D = 1$: somme n^2 , intersection nulle : supplémentaires.

c) $M = \left(M - \frac{\text{tr} M}{n} I_n\right) + \frac{\text{tr} M}{n} I_n$, et la première matrice a une trace nulle.

$$\text{tr}\left(M - \frac{\text{tr} M}{n} I_n\right) = \text{tr} M - \frac{\text{tr} M}{n} \times n = 0$$

d) $\text{tr} M = 8$, $n = 2$: $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 4I_2$; trace de la première : $-1 + 1 = 0$ ✓

Réponse. $M_n = T \oplus \text{Vect}(I_n)$, $M = \left(M - \frac{\text{tr} M}{n} I\right) + \frac{\text{tr} M}{n} I$; en d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 4I_2$.

Correction de l'exercice 8 - Divisibilité et somme directe de polynômes

a) $A \mapsto X^2 A$ est injective de $\mathbb{R}_1[X]$ (dimension 2) : $\dim F = 2$; de même $\dim G = 2$.

b) Un élément de $F \cap G$ est divisible par X^2 et $(X - 1)^2$, premiers entre eux, donc par $X^2(X - 1)^2$ de degré 4 ; étant de degré ≤ 3 , il est nul. $2 + 2 = 4$: $E = F \oplus G$.

c) $1 \in E$ se décompose : $1 = X^2 A + (X - 1)^2 B$. Avec $A = aX + b$, $B = cX + d$, l'identification (calcul exact) donne :

$$1 = (3 - 2X)X^2 + (2X + 1)(X - 1)^2$$

d) $X = 0$: $0 + 1 \times 1 = 1$ ✓ ; $X = 1$: $1 \times 1 + 0 = 1$ ✓ ; $X = 2$: $(-1) \times 4 + 5 \times 1 = 1$ ✓

— **Lien** : l'argument de dimension **prouve** l'existence de la relation de Bézout, sans algorithme d'Euclide.

Réponse. $\dim F = \dim G = 2$, $E = F \oplus G$; $1 = (3 - 2X)X^2 + (2X + 1)(X - 1)^2$.

Correction de l'exercice 9 - Dimension de Vect selon un paramètre

a) Le déterminant vaut $-(m - 1)^2(m + 2)$ (famille de l'exercice « Base selon un paramètre », à l'ordre des vecteurs près).

— $m \notin \{1, -2\}$: rang 3 ; $m = 1$: les trois vecteurs valent $(1, 1, 1)$, rang 1 ; $m = -2$: rang 2.

b) $\dim F_m = 3$, 1 ou 2 selon ces cas ($F_m = \mathbb{R}^3$ dans le cas général).

c) $m = -2$: la somme des trois vecteurs est nulle ; $F_{-2} = \text{Vect}((1, -2, 1), (-2, 1, 1))$. Chaque vecteur a des coordonnées de somme nulle :

$$F_{-2}: x + y + z = 0$$

d) Si $\dim F_m = 3$: oui. Si $m = 1$: $F_1 = \text{Vect}(1, 1, 1)$: oui. Si $m = -2$: $1 + 1 + 1 \neq 0$: non.
— Réponse : pour tout $m \neq -2$.

Réponse. $\dim F_m = 3$ ($m \notin \{1, -2\}$), 1 ($m = 1$), 2 ($m = -2$, $F_{-2}: x + y + z = 0$).

Correction de l'exercice 10 - Suites convergentes

a) C_0 : la limite est linéaire, $\lim(\lambda u + v) = 0$; $K = \text{Vect}((1)_n)$.

b) Si $u \in C$ de limite ℓ : $u = (u - \ell) + \ell$, avec $u - \ell \in C_0$ et $(\ell)_n \in K$. Une suite constante de limite nulle est nulle : $C_0 \cap K = \{0\}$.

$$u = (u_n - \ell)_n + (\ell)_n, \quad \ell = \lim u$$

c) $\ell = 2$: $u = \left(\frac{1}{n}\right) + (2)$.

d) Non : C_0 contient les suites $e^{(k)}$ (un 1 en position k , 0 ailleurs), qui forment une famille libre infinie. La dimension finie n'est pas nécessaire pour parler de somme directe.

Réponse. $C = C_0 \oplus K$, $u = (u - \lim u) + \lim u$; $2 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + 2$; dimension infinie.

Correction de l'exercice 11 - Fonctions continues nulles en 0

a) $f = (f - f(0)) + f(0)$; une constante nulle en 0 est nulle. $E = F \oplus G$.

b) H est le noyau de la forme linéaire $f \mapsto f(1) - f(0)$. Soit $\iota(x) = x$: $\iota(1) - \iota(0) = 1 \neq 0$, donc $\iota \notin H$ et $H \cap \text{Vect}(\iota) = \{0\}$. Décomposition :

$$f = (f - (f(1) - f(0))\iota) + (f(1) - f(0))\iota$$

— La première fonction prend la même valeur en 0 et 1 ✓

c) $\exp = (\exp - 1) + 1$ dans a) ; dans b) : $f(1) - f(0) = e - 1$,
 $\exp = (\exp - (e - 1)x) + (e - 1)x$.

d) Non : les sous-espaces sont différents (G et $\text{Vect}(\iota)$, F et H). Chaque somme directe définit **sa** projection.

Réponse. $E = F \oplus G$: $\exp = (\exp - 1) + 1$; $E = H \oplus \text{Vect}(x)$:
 $\exp = (\exp - (e - 1)x) + (e - 1)x$.

Correction de l'exercice 12 - Intersection d'hyperplans

a) $\dim(H_1 + H_2) \leq n$, donc par Grassmann $\dim(H_1 \cap H_2) \geq (n - 1) + (n - 1) - n = n - 2$.

b) Si $H_1 \neq H_2$: $H_1 + H_2$ contient strictement H_1 , donc vaut $\mathbb{R}^n$: $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$. Si $H_1 = H_2$: dimension $n - 1$.

c) Récurrence : chaque nouvelle intersection avec un hyperplan fait perdre **au plus** une dimension.

$$\dim(H_1 \cap \dots \cap H_k) \geq n - k$$

d) Somme et différence : $x + z = 0$ et $y + t = 0$. Solutions $(x, y, -x, -y)$: base
 $((1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1))$, dimension $2 = 4 - 2$ ✓

Réponse. $\dim(H_1 \cap H_2) \geq n - 2$ (égalité si $H_1 \neq H_2$) ; en d) base $(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1)$.

Correction de l'exercice 13 - Décomposer dans une somme directe de $\mathbb{R}^3$

a) $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$ (calcul exact) : les trois vecteurs forment une base, donc

$$F \oplus G = \mathbb{R}^3.$$

b) $\alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(1, 1, 0) = (3, 1, 2) : \alpha + \gamma = 3, \beta + \gamma = 1, \alpha + \beta = 2$. En sommant : $\alpha + \beta + \gamma = 3$, d'où $\gamma = 1, \alpha = 2, \beta = 0$.

$$(3, 1, 2) = (2, 0, 2) + (1, 1, 0)$$

c) Normale à $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 1) : (1, 1, -1)$. $F: x + y - z = 0 \checkmark (2 + 0 - 2 = 0)$.

d) $u = p(u) + \gamma(1, 1, 0)$ avec $p(u) \in F : x + y - z$ appliqué à u donne $x + y - z = 0 + 2\gamma$, d'où $\gamma = \frac{x + y - z}{2}$ et

$$- p(x, y, z) = (x, y, z) - \frac{x + y - z}{2}(1, 1, 0). \text{ Contrôle : } p(3, 1, 2) = (3, 1, 2) - (1, 1, 0) = (2, 0, 2) \checkmark$$

Réponse. $\mathbb{R}^3 = F \oplus G ; (3, 1, 2) = (2, 0, 2) + (1, 1, 0) ; p(u) = u - \frac{x + y - z}{2}(1, 1, 0)$.

Correction de l'exercice 14 - Une inclusion et les dimensions

a) Une base de F est une famille libre de G ayant $\dim G$ vecteurs : c'est une base de G . Donc $G = \text{Vect}(\text{base de } F) = F$.

b) $1 + X$ et $1 - X$ sont dans $\mathbb{R}_1[X]$ et libres (non colinéaires) : Vect de dimension $2 = \dim \mathbb{R}_1[X]$. Égalité.

c) $X - 1$ et $X^2 - 1$ s'annulent en 1 : inclusion $\supset$. Ils sont libres (degrés différents), dimension 2 ; l'ensemble de gauche est un hyperplan de $\mathbb{R}_2[X]$, dimension 2.

$$\dim = 2 \text{ des deux côtés} + \text{inclusion} \implies \text{égalité}$$

d) $F = X\mathbb{R}[X]$ (polynômes nuls en 0) est strictement inclus dans $G = \mathbb{R}[X]$, et $P \mapsto XP$ est une bijection linéaire de G sur F . En dimension infinie, « même taille » n'entraîne pas l'égalité.

Réponse. Inclusion + égalité des dimensions finies $\implies$ égalité ; contre-exemple infini : $X\mathbb{R}[X] \subsetneq \mathbb{R}[X]$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : polynômes symétriques par rapport à 1/2

a) $P \mapsto P(1 - X) - P(X)$ est linéaire ; E_n est son noyau.

b) On pose $Y = X - \frac{1}{2} : P(1 - X) = P(X)$ devient $R(-Y) = R(Y)$ pour $R(Y) = P\left(Y + \frac{1}{2}\right)$. R est pair, donc $R = Q(Y^2)$ (plaquette des polynômes) :

$$P = Q\left(\left(X - \frac{1}{2}\right)^2\right)$$

c) Base : $\left(1, \left(X - \frac{1}{2}\right)^2, \left(X - \frac{1}{2}\right)^4, \dots\right)$ jusqu'au degré $\leq n$ (degrés échelonnés, donc libre).

Les degrés pairs $0, 2, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$:

$$- \dim E_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

d) Même méthode : A_n correspond aux R **impairs**, base $\left(X - \frac{1}{2}\right)^{2k+1}$. Paires et impaires se complètent : $\mathbb{R}_n[X] = E_n \oplus A_n$ (c'est la décomposition pair/impair en la variable Y).

— $n = 3$: $\dim E_3 = 2$ (base $1, (X - \frac{1}{2})^2$) et $\dim A_3 = 2$ (base $X - \frac{1}{2}, (X - \frac{1}{2})^3$) :
 $2 + 2 = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X] \checkmark$

Réponse. $E_n = \left\langle Q\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 \right\rangle$, $\dim E_n = \lfloor n/2 \rfloor + 1$; $\mathbb{R}_n[X] = E_n \oplus A_n$.