

Plaquette 5 - Espaces vectoriels en action : synthèse

Espaces vectoriels — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Stratégies de dimension.

- Exhiber une **base** explicite (famille libre et génératrice).
- Construire une **bijection linéaire** avec K^n (par exemple « conditions initiales ») : $\dim = n$.
- **Nombre de paramètres libres** d'un système homogène : $n - \text{rg}$.

Réurrences linéaires. $u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + \dots + a_0u_n$: espace de dimension k . Si le polynôme caractéristique $X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \dots - a_0$ a des racines simples $r_1, \dots, r_k$:

$$u_n = \sum_{i=1}^k c_i r_i^n; \quad \text{racine double } r: (r^n), (nr^n)$$

- **EDL homogène** $y'' + ay' + by = 0$: espace de dimension 2, base e^{r_1x}, e^{r_2x} (racines distinctes de $r^2 + ar + b$).
- **Changement de corps** : $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ -espace de dimension 2 ; $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}\}$ est un $\mathbb{Q}$ -espace de dimension 2.
- **Codes linéaires** : sous-espaces de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$; un sous-espace de dimension k contient 2^k mots.

Correction de l'exercice 1 - Polynômes trigonométriques

a) Relations d'orthogonalité (plaquette des complexes) : pour $k, m \geq 0$, $\int_0^{2\pi} \cos(kx) \sin(mx) dx = 0$, et les intégrales $\int \cos(kx) \cos(mx)$, $\int \sin(kx) \sin(mx)$ sont nulles pour $k \neq m$. En multipliant une relation par chaque fonction et en intégrant, chaque coefficient est nul.

$$\dim T_n = 2n + 1$$

b) $(\cos kx)' = -k \sin kx$ et $(\sin kx)' = k \cos kx$: les dérivées restent dans T_n .

c) Linéarisation : $\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4}$: coordonnées $\frac{3}{4}$ sur $\cos x$, $\frac{1}{4}$ sur $\cos 3x$, 0 ailleurs.

d) $(a + b \cos x + c \sin x)(a' + b' \cos x + c' \sin x)$ fait apparaître $\cos^2$, $\sin^2$, $\cos \sin$, qui s'expriment avec $1, \cos 2x, \sin 2x$ ($\cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$). Le produit est dans T_2 : $T = \bigcup T_n$ est stable par produit.

Réponse. $\dim T_n = 2n + 1$; T_n stable par dérivation ; $\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x$.

Correction de l'exercice 2 - Réurrence à racine double

a) $u \mapsto (u_0, u_1)$ est une bijection linéaire de S sur $\mathbb{R}^2$.

b) Polynôme caractéristique $X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$: racine double 2. (2^n) convient. Pour $w_n = n2^n$:

$$4w_{n+1} - 4w_n = 4(n+1)2^{n+1} - 4n2^n = 2^{n+2}(2n+2-n) = (n+2)2^{n+2} = w_{n+2}$$

— Images $(1, 2)$ et $(0, 2)$ non colinéaires : base.

c) $v_n = (a + bn)2^n$; $v_0 = a = 1$; $v_1 = 2(1 + b) = 0$, $b = -1$.

— $v_n = (1 - n)2^n$. **Vérification** : $v_2 = 4v_1 - 4v_0 = -4$ et $(1 - 2) \times 4 = -4$ ✓ ;
 $v_3 = 4(-4) - 0 = -16$ et $(-2) \times 8 = -16$ ✓

d) Il n'y a qu'une suite géométrique (raison 2) dans S , qui engendre une droite ; il faut un second vecteur, $(n2^n)$, pour atteindre la dimension 2.

Réponse. Base $(2^n), (n2^n)$; $v_n = (1 - n)2^n$.

Correction de l'exercice 3 - Équation différentielle d'ordre 2

a) Équation linéaire homogène : sous-espace. $(e^{rx})'' - 3(e^{rx})' + 2e^{rx} = (r^2 - 3r + 2)e^{rx}$, nul si et seulement si $r^2 - 3r + 2 = 0$.

b) Racines 1 et 2 : e^x, e^{2x} . Libres : exponentielles de paramètres distincts (plaquette 3).

c) $y = \alpha e^x + \beta e^{2x}$: $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha + 2\beta = 1$, d'où $\beta = 1$, $\alpha = -1$.

$$y(x) = e^{2x} - e^x$$

— **Vérification** : $y'' - 3y' + 2y = (4 - 6 + 2)e^{2x} + (-1 + 3 - 2)e^x = 0$ ✓

d) La constante 2 est solution particulière ($0 - 0 + 4 = 4$) : l'ensemble est le sous-espace affine $2 + E = \{2 + \alpha e^x + \beta e^{2x}\}$.

Réponse. $E = \text{Vect}(e^x, e^{2x})$; $y = e^{2x} - e^x$; avec second membre 4 : $2 + E$.

Correction de l'exercice 4 - Conditions d'Hermite et dimension

a) Noyau de quatre formes linéaires. 0 et 1 racines au moins doubles $\Leftrightarrow X^2 \mid P$ et $(X - 1)^2 \mid P \Leftrightarrow X^2(X - 1)^2 \mid P$ (premiers entre eux).

b) $P = X^2(X - 1)^2Q$ avec $\deg Q \leq 1$:

$$F = \text{Vect}(X^2(X - 1)^2, X^3(X - 1)^2), \quad \dim F = 2$$

c) $\dim \mathbb{R}_5[X] = 6$ et les quatre conditions sont **indépendantes** (on peut les prescrire arbitrairement, voir d)) : $6 - 4 = 2$ ✓

d) $F \cap \mathbb{R}_3[X]$: un polynôme de degré ≤ 3 divisible par un polynôme de degré 4 est nul. $2 + 4 = 6$: somme directe.

— La composante sur $\mathbb{R}_3[X]$ a les **mêmes** $P(0), P'(0), P(1), P'(1)$ que P : c'est son **interpolant d'Hermite** (plaquette sur les polynômes).

Réponse. $F = \text{Vect}(X^2(X - 1)^2, X^3(X - 1)^2)$, $\dim F = 2$; $\mathbb{R}_5[X] = F \oplus \mathbb{R}_3[X]$.

Correction de l'exercice 5 - Code de parité

a) C est le noyau de la forme linéaire $x \mapsto \sum x_i$ (non nulle) : hyperplan, $\dim C = n - 1$.

b) Un F_2 -espace de dimension k a 2^k éléments (coordonnées dans $\{0, 1\}$) : 2^{n-1} mots.

— $n = 3$: 000, 110, 101, 011 : $4 = 2^2$ mots (ceux qui ont un nombre **pair** de 1) ✓

c) Changer un bit change la somme de 1 : le mot reçu n'est plus dans C (erreur **détectée**). Mais 100 peut provenir de 000, 110 ou 101 : impossible de savoir quel bit corriger.

d) Hamming : sous-espace de F_2^7 de dimension 4 (16 mots), défini par 3 équations ; il **corrige** une erreur.

parité : $\dim = n - 1$ (1 équation), Hamming (7, 4) : $\dim = 4$ (3 équations)

- Plus de redondance (équations) donne plus de capacité de correction, au prix de moins de mots utiles.

Réponse. $\dim C = n - 1$, 2^{n-1} mots ; détecte une erreur sans la corriger ; Hamming (7, 4) : 16 mots, corrige une erreur.

Correction de l'exercice 6 - Carrés semi-magiques

a) Intersection de noyaux de formes linéaires (« somme de la ligne i moins somme de la ligne 1 », idem pour les colonnes).

b) $\dim S = 9 - 4 = 5$ (calcul exact du rang confirmé).

$$\dim S = 5$$

- Pourquoi rang 4 et non 5 : la somme totale des coefficients vaut à la fois « trois fois la somme d'une ligne » et « trois fois la somme d'une colonne » ; une des conditions sur les colonnes découle des autres.

c) Une matrice de permutation a exactement un 1 par ligne et par colonne : toutes les sommes valent 1. Il y en a $3! = 6$.

- Six matrices dans un espace de dimension 5 : elles sont **liées** (théorème de Birkhoff : elles engendrent tout S).

d) Carrés magiques : dimension 3 ; les deux conditions diagonales font perdre 2 dimensions ($5 - 2 = 3$) ✓

Réponse. $\dim S = 5$; les 6 matrices de permutation sont semi-magiques (et liées) ; magiques : $5 - 2 = 3$.

Correction de l'exercice 7 - La dérivation sur les polynômes

a) $(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'$.

b) $\ker D =$ polynômes de dérivée nulle = **constantes** : $\mathbb{R}_0[X]$, dimension 1.

- $\text{Im} D \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ a une primitive dans $\mathbb{R}_n[X]$: $\text{Im} D = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, dimension n .

c) $1 + n = n + 1$ ✓ (c'est le **théorème du rang**, étudié dans le chapitre suivant).

d) Chaque dérivation baisse le degré de 1 : $D^{n+1}P = 0$. Et $D^n(X^n) = n! \neq 0$.

$$\text{Mat}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (n = 3)$$

- Colonne j : coordonnées de $D(X^j) = jX^{j-1}$. Matrice **nilpotente** (strictement triangulaire).

Réponse. $\ker D =$ constantes, $\text{Im} D = \mathbb{R}_{n-1}[X]$; $D^{n+1} = 0$; matrice strictement triangulaire de coefficients 1, 2, 3.

Correction de l'exercice 8 - Suites périodiques

a) $u \mapsto (u_0, u_1, u_2)$ est une bijection linéaire vers $\mathbb{R}^3$ (la suite est déterminée par ses trois premiers termes, choisis librement) : dimension 3.

b) $a = (1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$, $b = (0, 1, 0, 0, 1, 0, \dots)$, $c = (0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$.

c) $j^3 = 1$, donc $j^{n+3} = j^n$. Parties réelle et imaginaire de (j^n) : $\cos \frac{2n\pi}{3}$ et $\sin \frac{2n\pi}{3}$, périodiques de période 3. Avec (1), trois suites dont les triplets initiaux (1, 1, 1),

$(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ sont libres : base.

d) On cherche $\alpha + \beta \cos \frac{2n\pi}{3} + \gamma \sin \frac{2n\pi}{3}$ valant 1, 0, 0 en $n = 0, 1, 2$:

— $\alpha + \beta = 1$; $\alpha - \frac{\beta}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma = 0$; $\alpha - \frac{\beta}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma = 0$. D'où $\gamma = 0$, $\alpha = \frac{\beta}{2}$, $\beta = \frac{2}{3}$, $\alpha = \frac{1}{3}$.

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos \frac{2n\pi}{3}$$

— **Vérification** : $n = 0 : \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \checkmark$; $n = 1 : \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \checkmark$ (c'est une « série de Fourier discrète »).

Réponse. $\dim P_3 = 3$; $(1, 0, 0, \dots) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos \frac{2n\pi}{3}$.

Correction de l'exercice 9 - C comme espace vectoriel réel

a) Tout $z = a + ib$ s'écrit de façon unique $a \cdot 1 + b \cdot i$ avec a, b réels : base $(1, i)$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$. Sur $\mathbb{C}$, (1) est une base : $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$.

b) Sur $\mathbb{R}$: $\alpha(1 + i) + \beta(1 - i) = 0$ donne $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha - \beta = 0$: libre. Sur $\mathbb{C}$: $1 - i = -i(1 + i)$, liée.

la liberté dépend du corps des scalaires

c) (z_1, z_2) a quatre coordonnées réelles : base $((1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i))$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4 = 2 \times 2$.

d) Comme $\mathbb{R}$ -espace : oui ($\mathbb{R} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(1)$). Comme $\mathbb{C}$ -espace : non, $i \cdot 1 = i \notin \mathbb{R}$ (pas stable par multiplication par un scalaire complexe).

Réponse. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$; $(1 + i, 1 - i)$ libre sur $\mathbb{R}$, liée sur $\mathbb{C}$; $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$.

Correction de l'exercice 10 - Le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

a) C'est $\text{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \sqrt{2})$. Liberté : si $a + b\sqrt{2} = 0$ avec $b \neq 0$, alors $\sqrt{2} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$: absurde. Donc $b = 0$, puis $a = 0$. Dimension 2 sur $\mathbb{Q}$.

b) $(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$. Inverse (conjugué) :

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}$$

— $a^2 - 2b^2 \neq 0$ pour $(a, b) \neq (0, 0)$ (sinon $\sqrt{2} = \left|\frac{a}{b}\right|$ rationnel).

c) Si $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$: $3 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}$, donc $ab = 0$ (par a)). Si $b = 0$: $\sqrt{3} = a \in \mathbb{Q}$, faux. Si $a = 0$: $3 = 2b^2$, $\sqrt{\frac{3}{2}} = |b| \in \mathbb{Q}$, faux ($\sqrt{6}$ irrationnel).

d) Si $\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} = 0$ avec $\gamma \neq 0$, alors $\sqrt{3} = -\frac{\alpha + \beta\sqrt{2}}{\gamma} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$: contredit c). Donc $\gamma = 0$, puis a) donne $\alpha = \beta = 0$.

Réponse. $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = 2$; $\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}$; $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$; $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ libre sur $\mathbb{Q}$.

Correction de l'exercice 11 - Espace stable par dérivation

a) $F = \text{Vect}(f_1, f_2)$; libre : $(ax + b)e^x = 0$ pour tout x impose $ax + b = 0$, donc $a = b = 0$.

b) $f_1' = f_1$ et $f_2' = (x + 1)e^x = f_1 + f_2$. Colonnes = coordonnées des images :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $M = I + N$ avec $N^2 = 0$: $M^n = I + nN = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La dérivée n -ième de f_2 a pour coordonnées la deuxième colonne $(n, 1)$:

— $(xe^x)^{(n)} = (x + n)e^x$. **Contrôle** $n = 1$: $(x + 1)e^x$ ✓

d) $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: la primitive dans F de f_2 a pour coordonnées $(-1, 1)$, soit $(x - 1)e^x$.

Vérification : $((x - 1)e^x)' = xe^x$ ✓

Réponse. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $(xe^x)^{(n)} = (x + n)e^x$; primitive $(x - 1)e^x$.

Correction de l'exercice 12 - Espace engendré par les puissances d'une matrice

a) $A^2 = \text{tr}(A)A - \det(A)I_2 \in \text{Vect}(I_2, A)$; par récurrence, chaque A^k aussi ($A^{k+1} = A \cdot A^k$).

b) $\dim = 1 \Leftrightarrow A \in \text{Vect}(I_2) \Leftrightarrow A$ est une matrice **scalaire** λI_2 .

c) $A^2 = I_2$: les puissances paires valent I_2 , les impaires A ; $A^5 = A$.

$$\sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!} = \left(\sum_{k \text{ pair}} \frac{1}{k!} \right) I_2 + \left(\sum_{k \text{ impair}} \frac{1}{k!} \right) A = \text{ch}(1)I_2 + \text{sh}(1)A$$

d) $K(A)$ est au plus un plan dans l'espace $M_2(\mathbb{R})$ de dimension 4 : toutes les fonctions « polynomiales ou analytiques » de A vivent dans ce plan.

Réponse. $K(A) = \text{Vect}(I_2, A)$; $A^5 = A$; $\exp(A) = \text{ch}1 I_2 + \text{sh}1 A$.

Correction de l'exercice 13 - Rang d'une famille de sinusoides

a) $\sin(x + a) = \cos a \cdot \sin x + \sin a \cdot \cos x$.

b) Toutes les g_k sont dans un espace de dimension 2 : $\text{rang} \leq 2$.

c) Coordonnées dans $(\sin, \cos)$: $(\cos a_1, \sin a_1)$ et $(\cos a_2, \sin a_2)$. Libres $\Leftrightarrow$ déterminant non nul :

$$\cos a_1 \sin a_2 - \sin a_1 \cos a_2 = \sin(a_2 - a_1) \neq 0 \Leftrightarrow a_1 - a_2 \notin \pi\mathbb{Z}$$

d) Oui : la somme est dans $\text{Vect}(\sin \omega t, \cos \omega t)$, donc de la forme $A \sin \omega t + B \cos \omega t = R \sin(\omega t + \varphi)$; c'est l'algèbre des **amplitudes complexes** (construction de Fresnel).

Réponse. $g_k \in \text{Vect}(\sin, \cos)$, $\text{rang} \leq 2$; (g_1, g_2) libre $\Leftrightarrow \sin(a_2 - a_1) \neq 0$.

Correction de l'exercice 14 - Dimension d'un espace de matrices

a) Intersection des commutants $\{M : MD = DM\}$, noyaux d'applications linéaires.

b) Plaquette de calcul matriciel : les matrices commutant avec $\text{diag}(1, \dots, n)$ (coefficients distincts) sont exactement les diagonales. Donc $D \subset$ diagonales ; réciproquement, deux diagonales commutent.

c) $\dim D = n$ (base $E_{11}, \dots, E_{nn}$).

$$\dim D = n$$

d) Matrices diagonales par blocs $\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$: $4 + 1 = 5$.

— **Formule générale** : si les valeurs diagonales se répètent $m_1, \dots, m_r$ fois, la dimension est $\sum m_i^2$ ($2^2 + 1^2 = 5$ ✓).

Réponse. D = matrices diagonales, $\dim = n$; commutant de $\text{diag}(1, 1, 2)$: dimension 5.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : récurrence linéaire d'ordre 3

a) $u \mapsto (u_0, u_1, u_2)$ est une bijection linéaire sur $\mathbb{R}^3$.

b) $X^3 - 2X^2 - X + 2 = X^2(X - 2) - (X - 2) = (X - 2)(X - 1)(X + 1)$: racines 1, -1, 2.

— Base : $(1), ((-1)^n), (2^n)$ (libres : triplets initiaux $(1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 2, 4)$, de déterminant de Vandermonde non nul).

c) $u_n = \alpha + \beta(-1)^n + \gamma 2^n$:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 1 \\ \alpha + \beta + 4\gamma = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 0, \beta = -\frac{1}{3}, \gamma = \frac{1}{3}$$

— (La première et la troisième donnent $3\gamma = 1$; puis $\alpha + \beta = -\frac{1}{3}$ et $\alpha - \beta = \frac{1}{3}$.) Donc

$$u_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}.$$

d) Récurrence : $u_3 = 2 + 1 - 0 = 3$, $u_4 = 6 + 1 - 2 = 5$; formule : $\frac{8+1}{3} = 3$ ✓, $\frac{16-1}{3} = 5$ ✓

— C'est la suite de **Jacobsthal** ($u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$), déjà rencontrée avec le polynôme $X^2 - X - 2$: son polynôme caractéristique divise celui-ci.

Réponse. Base $(1), ((-1)^n), (2^n)$; $u_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$ (Jacobsthal).