

Plaquette 3 - Familles libres, génératrices et bases

Espaces vectoriels — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définitions. $(u_1, \dots, u_p)$ est **libre** si

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$$

- **Génératrice** de E : tout vecteur de E est combinaison des u_i . **Base** : libre et génératrice ; coordonnées **uniques**.
- **Rang** d'une famille de K^n = rang de la matrice des colonnes ; libre $\Leftrightarrow$ rang = p ; génératrice de $K^n \Leftrightarrow$ rang = n .
- En dimension n : n vecteurs libres, ou n vecteurs générateurs, forment une base.
- **Extraire** une base : garder les vecteurs des colonnes pivots. **Compléter** : ajouter des vecteurs de la base canonique et garder les colonnes pivots.

Bases de $K_n[X]$.

- Polynômes de **degrés échelonnés** $\deg P_k = k$: base.
- **Taylor** en a : $P = \sum_k \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$; **Lagrange** aux nœuds distincts $x_0, \dots, x_n$: $P = \sum_i P(x_i) L_i$.
- **Fonctions** : pour prouver la liberté, évaluer, dériver, ou diviser par le terme dominant et passer à la limite.

Correction de l'exercice 1 - Rang d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$

a) Forme échelonnée réduite (calcul exact) de $(u_1 \mid u_2 \mid u_3 \mid u_4)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Colonnes pivots 1, 2, 4 : rang 3 < 4, famille **liée**. La colonne 3 se lit : $u_3 = u_1 + u_2$.

— **Vérification** : $(1, 2, 0, 1) + (0, 1, 1, 1) = (1, 3, 1, 2) \checkmark$

c) (u_1, u_2, u_4) est libre maximale : $\dim F = 3$.

d) $\dim F = 3 < 4$: F est un **hyperplan**. On cherche (a, b, c, d) orthogonal aux trois vecteurs : $a + 2b + d = 0$, $b + c + d = 0$, $a + c = 0$. Avec $c = 1$: $a = -1$; $b + d = -1$ et $2b + d = 1$ donnent $b = 2$, $d = -3$.

— F : $-x + 2y + z - 3t = 0$. **Contrôle** : u_1 : $-1 + 4 + 0 - 3 = 0 \checkmark$; u_4 : $-1 + 0 + 1 - 0 = 0 \checkmark$

Réponse. Rang 3, $u_3 = u_1 + u_2$; base de F : (u_1, u_2, u_4) ; F : $-x + 2y + z - 3t = 0$.

Correction de l'exercice 2 - Polynômes de degrés échelonnés

a) Supposons $\sum \lambda_k P_k = 0$ avec des λ_k non tous nuls ; soit m le plus grand indice avec $\lambda_m \neq 0$. Le polynôme $\sum_{k \leq m} \lambda_k P_k$ est de degré **exactement** m (seul P_m a un terme en X^m), donc non nul : contradiction.

$$\deg P_k = k \implies (P_0, \dots, P_n) \text{ libre}$$

— $n + 1$ vecteurs libres dans $K_n[X]$, de dimension $n + 1$: base.

b) Degrés 0, 1, 2, 3 : base de $\mathbb{R}_3[X]$.

c) Les trois sont de degré 2 (degrés **non** échelonnés). Relation : $(X^2 + X) + (X^2 - X) - 2X^2 = 0$: **liée**.

d) Si $\alpha(X^2 + X) + \beta(X^2 - X) + \gamma = 0$: coefficient de X^2 : $\alpha + \beta = 0$; de X : $\alpha - \beta = 0$; constant : $\gamma = 0$. Donc tout est nul : libre, trois vecteurs dans un espace de dimension 3 : **base**.

Réponse. Degrés échelonnés $\Rightarrow$ base ; $(X^2 + X, X^2 - X, X^2)$ liée ; $(X^2 + X, X^2 - X, 1)$ base.

Correction de l'exercice 3 - Base de Lagrange

a) $L_i(j) = 1$ si $i = j$ et 0 sinon : par exemple $L_0(0) = \frac{(-1)(-2)}{2} = 1$, $L_0(1) = L_0(2) = 0$; $L_1(1) = -1 \times (-1) = 1$.

b) Si $\sum \lambda_i L_i = 0$, on évalue en j : $\lambda_j = 0$. Libre ; trois vecteurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ (dimension 3) : base.

c) Si $P = \sum a_i L_i$, en évaluant en j : $P(j) = a_j$. Donc

$$P = P(0)L_0 + P(1)L_1 + P(2)L_2$$

d) $X^2 = 0 \cdot L_0 + 1 \cdot L_1 + 4L_2$; $1 = L_0 + L_1 + L_2$.

— **Vérification** : $-X^2 + 2X + 2X^2 - 2X = X^2$ ✓

— **Intérêt** : dans cette base, les coordonnées sont des **valeurs** ; c'est la base naturelle pour interpolier.

Réponse. Coordonnées de P : $(P(0), P(1), P(2))$; $X^2 = L_1 + 4L_2$; $1 = L_0 + L_1 + L_2$.

Correction de l'exercice 4 - Base de Taylor

a) Degrés échelonnés 0, 1, 2 : base (exercice précédent).

b) Si $P = c_0 + c_1(X - a) + c_2(X - a)^2$, alors $P(a) = c_0$; $P' = c_1 + 2c_2(X - a)$, $P'(a) = c_1$; $P'' = 2c_2$. C'est la **formule de Taylor** :

$$P = P(a) + P'(a)(X - a) + \frac{P''(a)}{2}(X - a)^2$$

c) $P(1) = 4$, $P' = 4X - 1$, $P'(1) = 3$, $P'' = 4$:

— $P = 4 + 3(X - 1) + 2(X - 1)^2$.

— **Vérification** : $4 + 3X - 3 + 2X^2 - 4X + 2 = 2X^2 - X + 3$ ✓

d) 1 est racine double $\Leftrightarrow$ les deux premières coordonnées sont nulles ; ici $P(1) = 4 \neq 0$: 1 n'est même pas racine.

Réponse. Coordonnées $(P(a), P'(a), P''(a)/2)$; $2X^2 - X + 3 = 4 + 3(X - 1) + 2(X - 1)^2$.

Correction de l'exercice 5 - Liberté des exponentielles

a) Si $\lambda_1 e^{a_1 x} + \lambda_2 e^{a_2 x} = 0$ pour tout x : en 0, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$; en dérivant puis en 0, $a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 = 0$. Le système a pour déterminant $a_2 - a_1 \neq 0$: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

b) On choisit une relation avec des coefficients non tous nuls, et on appelle n le plus grand indice tel que $\lambda_n \neq 0$. En divisant par $e^{a_n x}$:

$$\lambda_n + \sum_{k < n} \lambda_k e^{(a_k - a_n)x} = 0$$

— Chaque $a_k - a_n < 0$, donc les termes de la somme tendent vers 0 en $+\infty$: il reste $\lambda_n = 0$, contradiction.

c) Cas $a_k = k$: libre pour tout n . Un espace contenant des familles libres de taille arbitraire n'est pas de dimension finie.

d) $\exp = \text{ch} + \text{sh}$: **liée**. (Seules deux exponentielles distinctes, e^x et e^{-x} , interviennent.)

Réponse. $(e^{a_k x})$ libre pour des a_k distincts ; dimension infinie ; $(\text{ch}, \text{sh}, \exp)$ liée.

Correction de l'exercice 6 - Familles de fonctions trigonométriques

a) $\alpha \cos + \beta \sin = 0$: en 0, $\alpha = 0$; en $\frac{\pi}{2}$, $\beta = 0$.

b) Formule d'addition : $\sin(x+1) = \cos 1 \cdot \sin x + \sin 1 \cdot \cos x$, soit
 $\sin 1 \cdot \cos + \cos 1 \cdot \sin - \sin(\cdot+1) = 0$

— Relation non triviale : **liée** (les trois fonctions sont dans le plan $\text{Vect}(\cos, \sin)$).

c) Sur $\mathbb{R}$: $\alpha x + \beta |x| = 0$; en $x = 1$: $\alpha + \beta = 0$; en $x = -1$: $-\alpha + \beta = 0$. Donc $\alpha = \beta = 0$: libre.

— Sur $[0; 1]$: $|x| = x$, donc $x - |x| = 0$: liée. La liberté dépend de l'**ensemble de définition**.

d) $\alpha + \beta \cos x + \gamma \cos 2x = 0$: en 0 : $\alpha + \beta + \gamma = 0$; en $\frac{\pi}{2}$: $\alpha - \gamma = 0$; en π : $\alpha - \beta + \gamma = 0$.
 On obtient $\beta = 0$, puis $2\alpha = 0$: tout est nul, **libre**.

Réponse. $(\cos, \sin)$ libre ; $\sin(x+1) = \sin 1 \cos x + \cos 1 \sin x$; $(x, |x|)$ libre sur $\mathbb{R}$, liée sur $[0; 1]$; $(1, \cos, \cos 2x)$ libre.

Correction de l'exercice 7 - Extraire une base

a) Forme échelonnée réduite (calcul exact) de $(v_1 \mid v_2 \mid v_3 \mid v_4)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— Rang 3 = $\dim \mathbb{R}^3$: génératrice. Quatre vecteurs dans $\mathbb{R}^3$: forcément liée.

b) Colonnes pivots 1, 2, 4 : (v_1, v_2, v_4) est une base.

c) Colonne 3 : $v_3 = -2v_1 + v_2$. **Vérification** : $(-2, 0, -2) + (2, 1, 3) = (0, 1, 1) \checkmark$

d) On résout $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_4 = (3, 3, 5)$: $\alpha + 2\beta + \gamma = 3$, $\beta + \gamma = 3$, $\alpha + 3\beta + \gamma = 5$.

— Première et troisième : $\beta = 2$, puis $\gamma = 1$, $\alpha = 3 - 4 - 1 = -2$. Coordonnées $(-2, 2, 1)$.

— **Vérification** : $(-2, 0, -2) + (4, 2, 6) + (1, 1, 1) = (3, 3, 5) \checkmark$

Réponse. Base extraite (v_1, v_2, v_4) ; $v_3 = -2v_1 + v_2$; $(3, 3, 5) = -2v_1 + 2v_2 + v_4$.

Correction de l'exercice 8 - Compléter en une base

a) $\alpha w_1 + \beta w_2 = (\alpha, \alpha + \beta, \beta, 0) = 0$ donne $\alpha = \beta = 0$.

b) L'échelonnement de la matrice des six colonnes (calcul exact) donne les pivots dans les colonnes w_1, w_2, e_1, e_4 :

$$B = (w_1, w_2, e_1, e_4)$$

— e_2 et e_3 sont écartés : $e_2 = w_1 - e_1$ et $e_3 = w_2 - e_2 = w_2 - w_1 + e_1$.

c) Matrice des colonnes $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Développement selon la dernière ligne, puis selon la troisième colonne du bloc 3×3 restant :

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

— La famille est libre ✓

d) $\text{Vect}(e_1, e_4)$ est un supplémentaire : la base incomplète fournit toujours un supplémentaire.

Réponse. Base (w_1, w_2, e_1, e_4) ; supplémentaire $\text{Vect}(e_1, e_4)$.

Correction de l'exercice 9 - Base selon un paramètre

a) Même calcul que pour le système symétrique (plaquette sur les systèmes) :

$$\det(u, v, w) = -(a-1)^2(a+2)$$

— Contrôle : $a = 0$ donne -2 ✓ ; $a = 3$ donne -20 ✓

b) Base $\Leftrightarrow \det \neq 0 \Leftrightarrow a \notin \{1, -2\}$.

c) $a = 1 : u = v = w = (1, 1, 1) : \text{rang } 1$.

— $a = -2 : u + v + w = (0, 0, 0)$ (chaque coordonnée vaut $1 + 1 - 2$) : relation $u + v + w = 0$; u et v ne sont pas colinéaires : rang 2.

d) $a = 0 : u = (1, 1, 0), v = (1, 0, 1), w = (0, 1, 1)$. Par symétrie, $(1, 1, 1) = \lambda(u + v + w) = \lambda(2, 2, 2) : \lambda = \frac{1}{2}$. Coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Réponse. $\det = -(a-1)^2(a+2)$; base $\Leftrightarrow a \notin \{1, -2\}$; rang 1 si $a = 1$, 2 si $a = -2$ ($u + v + w = 0$).

Correction de l'exercice 10 - Changement de famille

a) $\alpha(u + v) + \beta(v + w) + \gamma(w + u) = (\alpha + \gamma)u + (\alpha + \beta)v + (\beta + \gamma)w$.

— Si (u, v, w) est libre et cette combinaison est nulle : $\alpha + \gamma = \alpha + \beta = \beta + \gamma = 0$; en sommant, $\alpha + \beta + \gamma = 0$, puis chacun est nul. Libre.

— Réciproquement : $u = \frac{1}{2}((u + v) - (v + w) + (w + u))$, et de même pour v, w : une relation sur (u, v, w) se transporte.

b) Chaque famille est combinaison de l'autre (voir a)) : mêmes sous-espaces engendrés.

c) $(u - v) + (v - w) + (w - u) = 0$: toujours **liée**.

d) La matrice exprime $u + v, v + w, w + u$ dans (u, v, w) (colonnes). Son déterminant vaut $2 \neq 0$: elle est inversible, ce qui équivaut à a). Pour c), la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ a des colonnes de somme nulle : ses lignes sont liées ($L_1 + L_2 + L_3 = 0$), son déterminant est nul.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Réponse. $(u + v, v + w, w + u)$ libre $\Leftrightarrow (u, v, w)$ libre (déterminant 2) ; $(u - v, v - w, w - u)$

toujours liée.

Correction de l'exercice 11 - Liberté des $\cos(kx)$ par les intégrales

a) Vu dans la plaquette sur les nombres complexes (produit de formules d'Euler et intégrales de e^{ipx}).

b) Si $\sum_k \lambda_k c_k = 0$, on multiplie par c_m et on intègre sur $[0; 2\pi]$: tous les termes $k \neq m$ disparaissent :

$$\lambda_m \int_0^{2\pi} c_m^2 = 0 \implies \lambda_m = 0$$

— Ceci pour chaque m : famille **libre**.

c) $\lambda_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f = 3$; $\lambda_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \cos x = 2$; $\lambda_3 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \cos 3x = -1$; les autres sont nuls.

d) L'intégration isole **chaque** coefficient d'un coup, quel que soit n , grâce à l'**orthogonalité** ; l'évaluation demanderait de résoudre un système $(n+1) \times (n+1)$. C'est le point de départ des séries de Fourier.

Réponse. $(c_0, \dots, c_n)$ libre par orthogonalité ; coefficients de f : 3, 2, 0, -1.

Correction de l'exercice 12 - Famille de suites

a) $\alpha + \beta n + \gamma n^2 = 0$ pour tout n : $n = 0$: $\alpha = 0$; $n = 1$: $\beta + \gamma = 0$; $n = 2$: $2\beta + 4\gamma = 0$. D'où $\gamma = 0$, $\beta = 0$: libre.

b) Si $\alpha + \beta n + \gamma n^2 + \delta 2^n = 0$, on divise par 2^n :

$$\frac{\alpha + \beta n + \gamma n^2}{2^n} + \delta = 0$$

— Croissances comparées : la fraction tend vers 0, donc $\delta = 0$, puis a) conclut. Libre.

c) $n^2 + 3n + 2 = 2a + 3b + c$: oui. $2^{n+1} - 1 = 2d - a$: oui.

d) $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$: coordonnées $(1, 2, 1)$ dans (a, b, c) .

Réponse. (a, b, c, d) libre ; $n^2 + 3n + 2 = 2a + 3b + c$; $2^{n+1} - 1 = 2d - a$; $(n+1)^2$: $(1, 2, 1)$.

Correction de l'exercice 13 - Unicité des coordonnées

a) Génératrice $\Leftrightarrow$ existence de l'écriture. Liberté $\Leftrightarrow$ unicité : deux écritures $\sum a_i e_i = \sum b_i e_i$ donnent $\sum (a_i - b_i) e_i = 0$, donc $a_i = b_i$ si la famille est libre ; réciproquement, l'unicité de l'écriture de 0 est la liberté.

base $\Leftrightarrow$ existence et unicité des coordonnées

b) $(2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1)$ et $(2, 3) = 0 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (0, 1) + 2(1, 1)$: deux écritures, la famille n'est pas libre.

c) $\alpha(1+X) + \beta(1-X) + \gamma X^2 = 3 + X + 4X^2$: $\gamma = 4$, $\alpha + \beta = 3$, $\alpha - \beta = 1$, donc $\alpha = 2$, $\beta = 1$. Coordonnées $(2, 1, 4)$.

d) Si $f(e_i)$ est imposé, on pose $f(\sum x_i e_i) = \sum x_i f(e_i)$; la définition n'a de sens que si les x_i sont **uniques**, sinon deux écritures pourraient donner deux images différentes.

Réponse. Base $\Leftrightarrow$ coordonnées uniques ; $(2, 3)$ a deux écritures dans la famille liée ; $3 + X + 4X^2$: $(2, 1, 4)$.

Correction de l'exercice 14 - Vecteurs propres et liberté

a) Si $\alpha X_1 + \beta X_2 = 0$, on applique A : $\alpha \lambda_1 X_1 + \beta \lambda_2 X_2 = 0$. On retranche λ_1 fois la relation :

$$\beta(\lambda_2 - \lambda_1)X_2 = 0$$

— $X_2 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq \lambda_1$: $\beta = 0$, puis $\alpha X_1 = 0$ donne $\alpha = 0$.

b) Si $\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 = 0$: appliquer A et retrancher λ_3 fois la relation donne $\alpha(\lambda_1 - \lambda_3)X_1 + \beta(\lambda_2 - \lambda_3)X_2 = 0$. Par a), $\alpha(\lambda_1 - \lambda_3) = \beta(\lambda_2 - \lambda_3) = 0$, donc $\alpha = \beta = 0$, puis $\gamma = 0$.

c) $AX_1 = (6, 3 - 9, -3 + 5) = (6, -6, 2) = 2X_1$; $AX_2 = (0, -6, -2 + 5) = (0, -6, 3) = 3X_2$; $AX_3 = (0, 0, 5) = 5X_3$.

— Valeurs propres 2, 3, 5, distinctes : par b), (X_1, X_2, X_3) est libre, donc une base de $\mathbb{R}^3$ (ce sont les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire A).

d) Par récurrence (même méthode), ils forment une famille libre de n vecteurs : une **base**, dans laquelle A devient diagonale.

Réponse. Vecteurs propres de valeurs propres distinctes : libres ; en c) X_3 ($\lambda = 5$), $X_2 = (0, -2, 1)$ ($\lambda = 3$).

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : la base de Bernstein

a) $B_0 + B_1 + B_2 = (1 - X + X)^2 = 1$, $\frac{1}{2}B_1 + B_2 = X - X^2 + X^2 = X$, $B_2 = X^2$: la famille engendre 1, X , X^2 , donc $\mathbb{R}_2[X]$. Trois vecteurs générateurs en dimension 3 : **base**.

b) D'après a) :

$$1 = B_0 + B_1 + B_2, \quad X = \frac{1}{2}B_1 + B_2, \quad X^2 = B_2$$

c) $B_0 = 1 - 2X + X^2$, $B_1 = 2X - 2X^2$, $B_2 = X^2$: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (colonnes).

— P^{-1} a pour colonnes les coordonnées de 1, X , X^2 dans la nouvelle base :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \textbf{Contrôle : } PP^{-1}, \text{ ligne 2 : } (-2 + 2, 1, 0) = (0, 1, 0) \checkmark$$

d) $Q = 1 \cdot (B_0 + B_1 + B_2) + 2\left(\frac{1}{2}B_1 + B_2\right) - B_2 = B_0 + 2B_1 + 2B_2$.

— $Q(0) = 1$, $Q'(0) = 2$, $Q(1) = 2$: $(1, 1 + 1, 2) = (1, 2, 2) \checkmark$

— **Intérêt** : dans la base de Bernstein, les coordonnées sont les **points de contrôle** d'une courbe de Bézier.

Réponse. $1 = B_0 + B_1 + B_2$, $X = \frac{1}{2}B_1 + B_2$, $X^2 = B_2$; $Q = B_0 + 2B_1 + 2B_2$.