

Plaquette 2 - Reconnaître et décrire des sous-espaces

Espaces vectoriels — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Caractérisation. $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si

$$0_E \in F \quad \text{et} \quad \forall x, y \in F, \forall \lambda \in K, \lambda x + y \in F$$

- **Noyau** : l'ensemble des solutions d'un système linéaire **homogène** (ou d'une équation linéaire homogène : $f(0) = 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $y'' + y = 0$...) est toujours un sous-espace.
- **Engendré** : $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ est un sous-espace.
- **Non-sous-espace** : équation non homogène ($0 \notin F$), condition d'inégalité, produit ou carré ($xy = 0$).

Dimensions à connaître.

$$\dim K^n = n, \quad \dim K_n[X] = n + 1, \quad \dim M_{n,p}(K) = np, \quad \dim S_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \dim A_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

- Un **hyperplan** de E ($\dim E = n$) est un sous-espace de dimension $n - 1$; c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle.
- Pour décrire F défini par r équations **indépendantes** dans K^n : $\dim F = n - r$; une base se lit sur la solution paramétrée.

Correction de l'exercice 1 - Plans et droites de $\mathbb{R}^3$

a) F et G sont des **noyaux** de formes linéaires $((x, y, z) \mapsto x + 2y - z)$: sous-espaces. H ne contient pas 0 ($0 + 0 + 0 \neq 1$) : ce n'est pas un sous-espace.

b) $z = x + 2y$: $(x, y, x + 2y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 2)$.

— Base $((1, 0, 1), (0, 1, 2))$ (libre : regarder les deux premières coordonnées) ; $\dim F = 2$.

c) On résout le système des deux équations :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{z}{3}, y = \frac{2z}{3}$$

— $F \cap G = \text{Vect}(-1, 2, 3)$, de dimension 1. **Vérification** : $-1 + 4 - 3 = 0$ ✓ et $-1 - 2 + 3 = 0$ ✓

d) F et G sont deux **plans vectoriels** distincts (normales $(1, 2, -1)$ et $(1, -1, 1)$ non colinéaires) : ils se coupent selon une **droite** passant par O . H est un plan **affine** qui ne passe pas par O .

Réponse. F, G sous-espaces, H non ; base de F : $(1, 0, 1), (0, 1, 2)$; $F \cap G = \text{Vect}(-1, 2, 3)$.

Correction de l'exercice 2 - Parties d'un espace de fonctions

Méthode : pour « oui », vérifier $0 \in F$ et $\lambda f + g \in F$; pour « non », un contre-exemple.

a) A : la fonction nulle est dans A ; $(\lambda f + g)(0) = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$: **oui**.

— B : la fonction nulle vaut $0 \neq 1$ en 0 : **non**.

b) C : 0 est paire ; $(\lambda f + g)(-x) = \lambda f(x) + g(x)$: **oui**.

— D : 0 est bornée ; si $|f| \leq M$ et $|g| \leq M'$, alors $|\lambda f + g| \leq |\lambda|M + M'$: **oui**.

c) $x \mapsto x$ est croissante, mais $-1 \times x = -x$ ne l'est pas : **non** (pas stable par multiplication par un scalaire négatif).

E_1 n'est pas stable par $f \mapsto -f$

d) 0 convient ; si $f(x+1) = 2f(x)$ et $g(x+1) = 2g(x)$, alors $(\lambda f + g)(x+1) = 2(\lambda f + g)(x)$: **oui** (condition linéaire homogène).

— Exemple d'élément non nul : $x \mapsto 2^x$, ou $x \mapsto 2^x \sin(2\pi x)$ (l'espace est de dimension infinie).

Réponse. Sous-espaces : A, C, D, E_2 ; pas sous-espaces : B ($0 \notin B$), E_1 (non stable par -1).

Correction de l'exercice 3 - Parties d'un espace de suites

a) Convergentes : la suite nulle converge, et $\lim(\lambda u + v) = \lambda \lim u + \lim v$: **oui**. De limite 1 : la suite nulle n'y est pas : **non**.

b) $u_n = u_0 + nr$: $u = u_0 \cdot (1)_n + r \cdot (n)_n$. Les suites arithmétiques forment $\text{Vect}((1)_n, (n)_n)$: **oui**, base $((1)_n, (n)_n)$, dimension 2.

c) $(1)_n$ et $(2^n)_n$ sont géométriques, mais leur somme $(1 + 2^n)$: 2, 3, 5, 9 n'a pas de rapport constant ($\frac{3}{2} \neq \frac{5}{3}$) : **non**.

d) Relation linéaire homogène : **oui**. Une suite est déterminée par (u_0, u_1) : dimension 2.

$$r^{n+2} = 3r^{n+1} - 2r^n \Leftrightarrow r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow r \in \{1, 2\}$$

— $(1)_n$ et $(2^n)_n$ sont dans l'ensemble et libres (images $(1, 1)$ et $(1, 2)$ non colinéaires) : c'est une **base**. Toute solution s'écrit $u_n = \alpha + \beta 2^n$.

Réponse. Convergentes : oui ; limite 1 : non ; arithmétiques : oui, base $(1), (n)$; géométriques : non ; $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$: base $(1), (2^n)$.

Correction de l'exercice 4 - Polynômes s'annulant en un point

a) $P \mapsto P(1)$ et $P \mapsto P'(1)$ sont **linéaires** ; F et G sont des noyaux : sous-espaces.

b) $P(1) = 0 \Leftrightarrow (X-1) \mid P$, et le quotient est de degré ≤ 2 . L'application $Q \mapsto (X-1)Q$ est linéaire et injective de $\mathbb{R}_2[X]$ sur F :

— Base de F : $(X-1, X(X-1), X^2(X-1))$ (image de la base $1, X, X^2$) ; $\dim F = 3$.

c) $P(1) = P'(1) = 0 \Leftrightarrow 1$ racine au moins double $\Leftrightarrow (X-1)^2 \mid P$: $G = \{(X-1)^2 Q : Q \in \mathbb{R}_1[X]\}$.

$$G = \text{Vect}\left((X-1)^2, X(X-1)^2\right), \quad \dim G = 2$$

d) $\varphi: P \mapsto P(1)$ est une forme linéaire **non nulle** sur $\mathbb{R}_3[X]$ ($\varphi(1) = 1$). Son noyau est un hyperplan : $\dim F = 4 - 1 = 3$ ✓ Et G est le noyau de deux formes indépendantes : $4 - 2 = 2$ ✓

Réponse. F : base $(X-1, X(X-1), X^2(X-1))$, $\dim 3$; G : base $((X-1)^2, X(X-1)^2)$, $\dim 2$.

Correction de l'exercice 5 - Matrices symétriques, antisymétriques, de trace nulle

a) S_n et A_n sont les noyaux de $M \mapsto M - M^T$ et $M \mapsto M + M^T$, linéaires ; T_n est le noyau de la forme linéaire tr .

b) $n = 2$:

- $S_2 : \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = aE_{11} + b(E_{12} + E_{21}) + cE_{22} : \text{base } (E_{11}, E_{12} + E_{21}, E_{22}), \text{ dimension } 3.$
- $A_2 : \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} : \text{base } (E_{12} - E_{21}), \text{ dimension } 1.$
- $T_2 : \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} : \text{base } (E_{11} - E_{22}, E_{12}, E_{21}), \text{ dimension } 3.$

c) Une symétrique est déterminée par ses coefficients **sur et au-dessus** de la diagonale :

$n + (n-1) + \dots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$ paramètres libres (base : E_{ii} et $E_{ij} + E_{ji}$, $i < j$). Une antisymétrique : diagonale nulle, coefficients strictement au-dessus : $\frac{n(n-1)}{2}$.

d) tr est une forme linéaire non nulle : T_n est un hyperplan, $\dim = n^2 - 1$.

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

— C'est cohérent avec la décomposition unique $M = S + A : M_n = S_n \oplus A_n$.

Réponse. $\dim S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim A_n = \frac{n(n-1)}{2}$, $\dim T_n = n^2 - 1$.

Correction de l'exercice 6 - Noyau d'une matrice rectangulaire

a) $A0 = 0$ et $A(\lambda X + Y) = \lambda AX + AY = 0$ si $AX = AY = 0$.

b) $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 : (0, 0, 1, 1)$. Système : $x + 2y + t = 0$ et $z + t = 0$. Inconnues libres y, t :

$$(x, y, z, t) = y(-2, 1, 0, 0) + t(-1, 0, -1, 1)$$

— Base de $\ker A : ((-2, 1, 0, 0), (-1, 0, -1, 1))$ (libre : regarder les coordonnées y et t).

c) $\text{rg} A = 2$ (deux pivots) et $\dim \ker A = 2 = 4 - 2 \checkmark$

d) $A(1, 1, 1, 1) = (1 + 2 + 0 + 1, 2 + 4 + 1 + 3) = (4, 10) \neq 0$: non.

— $A(-2, 1, 0, 0) = (-2 + 2, -4 + 4) = (0, 0)$: oui (c'est le premier vecteur de la base).

Réponse. $\ker A = \text{Vect}((-2, 1, 0, 0), (-1, 0, -1, 1))$, $\dim 2 = 4 - \text{rg} A$.

Correction de l'exercice 7 - Espace des solutions d'une équation différentielle

a) La fonction nulle vérifie $0 + 0 = 0$; l'équation est linéaire homogène, stable par combinaison : sous-espace. La fonction nulle ne vérifie pas $y' + y = 1$: E_1 n'est pas un sous-espace.

b) $\cos'' = -\cos$, donc $\cos'' + \cos = 0 \checkmark$; de même pour $\sin$.

— Liberté : si $\alpha \cos + \beta \sin = 0$, en $x = 0$: $\alpha = 0$; en $x = \frac{\pi}{2}$: $\beta = 0$.

c) Deux vecteurs libres dans un espace de dimension 2 : base.

$$E = \{\alpha \cos + \beta \sin : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

— La constante 1 vérifie $0 + 1 = 1$: solution particulière. $y \in E_1 \Leftrightarrow y - 1 \in E : E_1 = 1 + E$, un sous-espace **affine**.

d) $y = 1 + \alpha \cos x + \beta \sin x$; $y(0) = 1 + \alpha = 0$, $\alpha = -1$; $y'(0) = \beta = 1$.

— $y(x) = 1 - \cos x + \sin x$. **Vérification** : $y' = \cos x - \sin x$ et $y' + y = 1 \checkmark$

Réponse. $E = \text{Vect}(\cos, \sin)$, $E_1 = 1 + E$; $y = 1 - \cos x + \sin x$.

Correction de l'exercice 8 - Sous-espace engendré par des fonctions

a) $\cos^2 + \sin^2 - 1 = 0$: relation non triviale, famille **liée**.

b) $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ et $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$: les trois fonctions sont combinaisons de 1 et $\cos 2x$, donc $F \subset \text{Vect}(1, \cos 2x)$. Réciproquement $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \in F$.

$$F = \text{Vect}(1, x \mapsto \cos 2x)$$

c) Si $\alpha + \beta \cos 2x = 0$ pour tout x : en $x = 0$, $\alpha + \beta = 0$; en $x = \frac{\pi}{2}$, $\alpha - \beta = 0$. Donc $\alpha = \beta = 0$: libre, $\dim F = 2$.

d) $\cos^4 - \sin^4 = (\cos^2 - \sin^2)(\cos^2 + \sin^2) = \cos 2x$: **oui**, c'est même un vecteur de la base.

Réponse. $\cos^2 + \sin^2 - 1 = 0$; $F = \text{Vect}(1, \cos 2x)$, $\dim F = 2$; $\cos^4 - \sin^4 = \cos 2x \in F$.

Correction de l'exercice 9 - Hyperplan et droite supplémentaire

a) H est le noyau de la forme linéaire non nulle $x \mapsto \sum x_i$: hyperplan. Base : $(e_1 - e_n, e_2 - e_n, \dots, e_{n-1} - e_n)$ ($n - 1$ vecteurs de H , libres car on lit les $n - 1$ premières coordonnées).

b) Si $\lambda(1, \dots, 1) \in H$, alors $n\lambda = 0$, donc $\lambda = 0$.

c) $\dim H + \dim D = (n - 1) + 1 = n$ et $H \cap D = \{0\}$: supplémentaires. Décomposition : $x = h + \lambda(1, \dots, 1)$; en sommant les coordonnées, $\sum x_i = 0 + n\lambda$, d'où

$$\lambda = \bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \quad h = x - \bar{x}(1, \dots, 1)$$

— La composante sur D est la **moyenne** ; la composante sur H est le vecteur **centré** (écarts à la moyenne).

d) $\bar{x} = 2$: $(4, 1, 1) = (2, -1, -1) + (2, 2, 2)$, avec $2 - 1 - 1 = 0$ ✓

Réponse. $\mathbb{R}^n = H \oplus D$; $x = (x - \bar{x}\mathbf{1}) + \bar{x}\mathbf{1}$; en d) $(2, -1, -1) + (2, 2, 2)$.

Correction de l'exercice 10 - Commutant d'une matrice

a) $M \mapsto AM - MA$ est linéaire ; $C(A)$ est son noyau.

b) $AM = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$, $MA = \begin{pmatrix} a & a+2b \\ c & c+2d \end{pmatrix}$. Égalité :

$$c = 0, \quad b + d = a + 2b \Leftrightarrow d = a + b$$

— (Les autres équations, $2c = c$ et $2d = c + 2d$, redonnent $c = 0$.)

c) $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: base $\left(I_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$, dimension 2.

— Et $A = I_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\text{Vect}(I_2, A)$ est le même plan : $C(A) = \text{Vect}(I_2, A)$.

d) Si M, N commutent avec A : $AMN = MAN = MNA$. Donc $MN \in C(A)$.

Réponse. $C(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect}(I_2, A)$, dimension 2.

Correction de l'exercice 11 - Polynômes invariants par translation

a) $\Delta: P \mapsto P(X+1) - P(X)$ est linéaire ; $F = \ker \Delta$.

b) Si $P \in F$, alors $P(n) = P(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (récurrence). Le polynôme $P - P(0)$ a une

infinité de racines : il est nul. Réciproquement, les constantes sont dans F .

$$F = \mathbb{R}_0[X] = \{\text{constantes}\}, \quad \dim F = 1$$

c) $G = \Delta^{-1}(\mathbb{R}_1[X]) \cap \mathbb{R}_3[X]$: image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire, donc sous-espace.

— Δ abaisse le degré de 1 exactement ($\Delta X^3 = 3X^2 + 3X + 1$, $\Delta X^2 = 2X + 1$, $\Delta X = 1$). Pour $P = aX^3 + \dots$, le terme en X^2 de ΔP est $3aX^2$: $\Delta P \in \mathbb{R}_1[X] \Leftrightarrow a = 0$. Donc $G = \mathbb{R}_2[X]$.

d) $\dim G = 3$.

Réponse. $F = \text{constantes}$ (dim 1) ; $G = \mathbb{R}_2[X]$ (dim 3).

Correction de l'exercice 12 - Matrices annulées par une matrice

a) $M \mapsto AM$ est linéaire ; F est son noyau.

b) La colonne j de AM est A fois la colonne j de M . $\ker A : x + 2y = 0$ (la deuxième ligne est le double), soit $\ker A = \text{Vect}(-2, 1)$.

c) Les deux colonnes sont multiples de $(-2, 1)$:

$$M = \begin{pmatrix} -2\alpha & -2\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— Base de deux matrices (libres : positions différentes), $\dim F = 2$.

d) $MA = 0 \Leftrightarrow A^T M^T = 0$; ici $A^T = A$: les **lignes** de M sont dans $\ker A$: $M = \begin{pmatrix} -2\alpha & \alpha \\ -2\beta & \beta \end{pmatrix}$,

$\dim G = 2$.

— $F \neq G$: par exemple $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in F$ mais pas dans G (sa première ligne $(-2, 0)$ n'est pas dans $\ker A$).

Réponse. $\ker A = \text{Vect}(-2, 1)$; $F = \left\langle \begin{pmatrix} -2\alpha & -2\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \right\rangle$, dim 2 ; G : lignes dans $\ker A$, dim 2.

Correction de l'exercice 13 - Démontrer qu'une partie n'est pas un sous-espace

Rappel : un seul contre-exemple suffit à montrer qu'une partie **n'est pas** un sous-espace ; une preuve générale est nécessaire pour montrer qu'elle **en est** un.

a) $P_1 =$ réunion des deux axes. $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin P_1$: **non**.

b) $P_2 =$ réunion des droites $y = x$ et $y = -x$. $(1, 1) + (1, -1) = (2, 0)$ et $4 \neq 0$: **non**.

c) $(1, 0) \in P_3$ mais $-1 \cdot (1, 0) = (-1, 0) \notin P_3$: **non** (demi-plan, pas stable par les scalaires négatifs).

d) P_4 : noyau d'une forme linéaire, **oui** (droite dirigée par $(3, 2)$).

— $P_5 : (1, 1) \in P_5$ mais $2(1, 1) = (2, 2)$ et $2 \neq 4$: **non** (parabole).

Condition non linéaire (produit, carré, inégalité) = chercher un contre-exemple

Réponse. Seul P_4 est un sous-espace ; contre-exemples : $(1, 1)$ pour P_1 , $(2, 0)$ pour P_2 , $(-1, 0)$ pour P_3 , $(2, 2)$ pour P_5 .

Correction de l'exercice 14 - Fonctions polynomiales par morceaux

a) La fonction nulle convient ; une combinaison de fonctions continues et affines sur chaque morceau l'est encore.

b) L'application est linéaire. Une fonction de F est déterminée par ses valeurs en 0, 1, 2 (une fonction affine sur un segment est déterminée par ses valeurs aux extrémités), et tout triplet est atteint (on relie les points par des segments). Bijection :

$$\dim F = 3$$

c) φ_0 : vaut 1 en 0, 0 en 1 et 2 ($\varphi_0(x) = 1 - x$ sur $[0; 1]$, 0 ensuite) ; φ_1 : « chapeau » valant 1 en 1, 0 en 0 et 2 ; φ_2 : vaut 1 en 2 seulement.

d) $|x - 1|$ vaut 1, 0, 1 en 0, 1, 2, et elle est affine sur chaque morceau :

— $|x - 1| = \varphi_0 + \varphi_2$.

— **Portée** : ces fonctions « chapeaux » sont la base de la **méthode des éléments finis** en calcul scientifique.

Réponse. $\dim F = 3$, base des fonctions chapeaux $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$; $|x - 1| = \varphi_0 + \varphi_2$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : l'espace des carrés magiques

a) Chaque condition « la ligne 2 a la même somme que la ligne 1 » s'écrit $\ell_2(M) - \ell_1(M) = 0$ avec des formes linéaires : M est l'intersection de noyaux, donc un sous-espace.

b) J : toutes les sommes valent 3 ✓

— M_1 : lignes 0, 0, 0 ; colonnes 0, 0, 0 ; diagonales $1 + 0 - 1 = 0$ et $0 + 0 + 0 = 0$ ✓ (somme 0).

— M_2 : lignes et colonnes de somme 0 ; diagonales $0 + 0 + 0$ et $-1 + 0 + 1$ ✓

c) Liberté : si $\alpha J + \beta M_1 + \gamma M_2 = 0$, le coefficient central donne $\alpha = 0$ (celui de M_1 et M_2 est nul) ; le coefficient (1, 1) donne alors $\beta = 0$; le coefficient (1, 2) donne $\gamma = 0$.

— Trois vecteurs libres dans un espace de dimension 3 : **base**.

d) On cherche $\alpha J + \beta M_1 + \gamma M_2$. Centre : $\alpha = 5$. Coefficient (1, 1) : $5 + \beta = 2$, $\beta = -3$. Coefficient (1, 2) : $5 - \beta + \gamma = 7$, $\gamma = -1$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} = 5J - 3M_1 - M_2$$

— **Vérification** des neuf coefficients (par exemple (2, 1) : $5 + 3 + 1 = 9$ ✓ ; (3, 3) : $5 + 3 + 0 = 8$ ✓). La somme magique vaut $3 \times 5 = 15$.

Réponse. M sous-espace de dimension 3, base (J, M_1, M_2) ; Lo Shu = $5J - 3M_1 - M_2$.