

Plaquette 1 – Sous-espaces, familles libres, bases et dimension

Espaces vectoriels — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Sous-espace vectoriel. $F \subset E$ est un sous-espace si $0_E \in F$ et si

$$\forall x, y \in F, \forall \lambda \in K, \lambda x + y \in F$$

- Une **intersection** de sous-espaces en est un ; une **réunion**, en général **non**.
- $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ est l'ensemble des **combinaisons linéaires** — le plus petit sous-espace contenant ces vecteurs.
- **Test rapide** : si $0_E \notin F$, ce n'est pas un sous-espace (cas des équations **non homogènes**).

Familles.

- **Libre** : $\sum \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow$ tous les λ_i nuls.
- **Génératrice** de E : $\text{Vect}(x_i) = E$.
- **Base** : libre **et** génératrice ; les coordonnées d'un vecteur y sont **uniques**.

Dimension.

- Toutes les bases ont le **même cardinal**, noté $\dim E$.
- En dimension n : une famille libre a **au plus** n vecteurs, une génératrice **au moins** n ; une famille de n **vecteurs libre** (ou génératrice) est une **base**.
- **Base incomplète** : toute famille libre se complète en une base.
- $F \subset E$ avec $\dim E$ finie : $\dim F \leq \dim E$, avec **égalité** $\Leftrightarrow F = E$.

Sommes.

- $F + G = \{x + y\}$; la somme est **directe** ($F \oplus G$) si $F \cap G = \{0\}$.
- **Formule de Grassmann** :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

- F et G sont **supplémentaires** dans E si $F \oplus G = E$, ce qui équivaut à $F \cap G = \{0\}$ **et** $\dim F + \dim G = \dim E$.

Exemples d'espaces : K^n (dimension n), $K_n[X]$ (dimension $n + 1$), $M_{p,q}$ (dimension pq), les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (dimension **infinie**).

Correction de l'exercice 1 – Reconnaître un sous-espace

- a) **Oui**. $(0, 0, 0)$ vérifie l'équation, et la linéarité de $2x - y + z$ assure la stabilité. C'est un **plan vectoriel**, de dimension 2.
- b) **Non**. $(0, 0, 0)$ ne vérifie pas $0 = 2$ — le vecteur nul manque. C'est un **plan affine**.
- c) **Non**. $(1, 1, 0)$ et $(1, -1, 0)$ sont dans H , mais leur somme $(2, 0, 0)$ vérifie $4 \neq 0$ — pas de stabilité par addition. C'est la **réunion** des deux plans $y = x$ et $y = -x$.
- **Réflexes de test** : vérifier 0_E (élimine b) ; chercher deux éléments dont la somme sort (élimine c).
- **Principe** : les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ sont exactement les ensembles de solutions de systèmes **linéaires homogènes**.

Réponse. a) oui · b) non ($0 \notin G$) · c) non (réunion de deux plans).

Correction de l'exercice 2 - Famille libre

On résout $\lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3 = 0$, soit le système

$$\begin{cases} \lambda + \nu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases}$$

- Des deux premières : $\lambda = -\nu$ et $\mu = -\nu$.
- **Report dans la troisième** : $-2\nu = 0$, donc $\nu = 0$, puis $\lambda = \mu = 0$.
- **Conclusion** : seule la solution nulle — la famille est **libre**.
- **De plus** : trois vecteurs libres en dimension 3 forment une **base** de $\mathbb{R}^3$.
- **Contrôle par le déterminant** : $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1(0 - 1) - 0 + 1(0 - 1) = -2 \neq 0 \checkmark$ (les vecteurs sont pris en colonnes)
- **Méthode la plus rapide** en dimension n avec n vecteurs : calculer le **déterminant**.

Réponse. Oui, libre — c'est même une base de $\mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 3 - Base d'un plan

- **Paramétrage** : $z = -x - y$, avec x et y libres.
- $(x, y, z) = (x, y, -x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$.
- **Famille génératrice** : $((1, 0, -1), (0, 1, -1))$.
- **Liberté** : si $x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) = 0$, les deux premières coordonnées donnent $x = y = 0 \checkmark$
- **Conclusion** : c'est une **base**, et $\dim F = 2$.
- **Vérifications** : $1 + 0 - 1 = 0 \checkmark$ et $0 + 1 - 1 = 0 \checkmark$
- **Règle générale** : une équation linéaire non triviale dans $\mathbb{R}^n$ définit un **hyperplan** de dimension $n - 1$. Ici $3 - 1 = 2 \checkmark$
- **Autre base possible** : $((1, -1, 0), (0, 1, -1))$ — il y a une infinité de bases.

Réponse. Base $((1, 0, -1), (0, 1, -1))$, $\dim F = 2$.

Correction de l'exercice 4 - Espace de polynômes

- $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension 4 (base $1, X, X^2, X^3$).
- **F est un sous-espace** : c'est le **noyau** de la forme linéaire $P \mapsto P(1)$.
- $P(1) = 0$ équivaut à $(X - 1) \mid P$, donc $P = (X - 1)Q$ avec $\deg Q \leq 2$.
- **Base** : $(X - 1, X(X - 1), X^2(X - 1))$, images de $1, X, X^2$.
- **Liberté** : ces polynômes sont de degrés 1, 2, 3 — **échelonnés en degré**, donc libres $\checkmark$
- **Dimension** : $\dim F = 3$.
- **Contrôle par le théorème du rang** : l'application $P \mapsto P(1)$ va de la dimension 4 dans $\mathbb{R}$ (dimension 1) et est **surjective**, donc $\dim \ker = 4 - 1 = 3 \checkmark$
- **Autre base** : $(X - 1, X^2 - 1, X^3 - 1)$ — également valide.

Réponse. $(X - 1, X(X - 1), X^2(X - 1))$, de dimension 3.

Correction de l'exercice 5 - Rang d'une famille

- **Relations visibles** : $u_3 = u_1 + u_2$ (soit $(1, 2, 1)$ ✓) et $u_4 = u_1 - u_2$ (soit $(1, 0, -1)$ ✓).
- Les vecteurs u_3 et u_4 sont donc dans $\text{Vect}(u_1, u_2)$: ils n'ajoutent **rien**.
- **Liberté de** (u_1, u_2) : ils ne sont pas colinéaires (première coordonnée 1 contre 0) ✓
- **Rang** : 2.
- **Conséquence** : les quatre vecteurs sont **coplanaires**, dans le plan $\text{Vect}(u_1, u_2)$ d'équation $x - y + z = 0$.
- **Vérification** : $1 - 1 + 0 = 0$ ✓ ; $0 - 1 + 1 = 0$ ✓ ; $1 - 2 + 1 = 0$ ✓ ; $1 - 0 - 1 = 0$ ✓
- **Remarque** : quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont **toujours** liés — le rang ne pouvait dépasser 3.

Réponse. Rang 2 : les quatre vecteurs sont coplanaires.

Correction de l'exercice 6 - Théorème de la base incomplète

- **Liberté de départ** : les deux vecteurs ne sont pas colinéaires ✓
- **Plan engendré** : on cherche son équation. Un vecteur normal est $(1, 1, 1) \wedge (1, 2, 3) = (3 - 2, 1 - 3, 2 - 1) = (1, -2, 1)$.
- Le plan est donc $x - 2y + z = 0$; il suffit de choisir un vecteur **hors** de ce plan.
- **Essai** : $e_1 = (1, 0, 0)$ donne $1 \neq 0$ ✓ — il convient.
- **Base** : $((1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 0, 0))$.
- **Vérification par le déterminant** : $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; en développant selon la troisième colonne, $1 \times (3 - 2) = 1 \neq 0$ ✓
- **Méthode pratique** : tester les vecteurs de la **base canonique** un à un — l'un d'eux convient nécessairement.

Réponse. Ajouter $(1, 0, 0)$ (hors du plan $x - 2y + z = 0$).

Correction de l'exercice 7 - Somme directe

- **Dimensions** : $\dim F = 1$; G est un plan, donc $\dim G = 2$.
- **Intersection** : un vecteur de F s'écrit $t(1, 1, 0) = (t, t, 0)$; la condition de G donne $2t = 0$, donc $t = 0$.
- Ainsi $F \cap G = \{0\}$ ✓
- **Somme des dimensions** : $1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ ✓
- **Conclusion** : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ — les deux sous-espaces sont **supplémentaires**.
- **Décomposition explicite** de (a, b, c) : on cherche t tel que $(a, b, c) - t(1, 1, 0) \in G$, soit $a + b - 2t = 0$, donc $t = \frac{a+b}{2}$.
- **Exemple** : $(3, 1, 5) = 2(1, 1, 0) + (1, -1, 5)$, et $1 - 1 = 0$ ✓
- **Vocabulaire** : « supplémentaire » n'est pas « complémentaire » — un sous-espace admet une **infinité** de supplémentaires.

Réponse. $F \cap G = \{0\}$ et $1 + 2 = 3$: somme directe égale à $\mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 8 - Formule de Grassmann

- **Grassmann** : $\dim(F + G) = 3 + 2 - \dim(F \cap G) = 5 - \dim(F \cap G)$.
- **Contrainte supérieure** : $F + G \subset \mathbb{R}^4$, donc $\dim(F + G) \leq 4$, soit $\dim(F \cap G) \geq 1$.
- **Contrainte inférieure** : $F \cap G \subset G$, donc $\dim(F \cap G) \leq 2$.

- **Valeurs possibles** : 1 ou 2.
- **Cas 2** : cela signifie $G \subset F$; alors $F + G = F$, de dimension 3.
- **Cas 1** : $G \not\subset F$, et $F + G = \mathbb{R}^4$.
- **Conséquence remarquable** : un hyperplan et un plan de $\mathbb{R}^4$ se coupent **toujours** selon au moins une droite — ils ne peuvent être « disjoints ».
- **Analogie en dimension 3** : un plan et une droite se coupent toujours, sauf si la droite est parallèle au plan (intersection réduite à $\{0\}$ en vectoriel — mais ici les dimensions l'interdisent).

Réponse. $\dim(F \cap G) \in \{1, 2\}$.

Correction de l'exercice 9 - Espace de matrices

- **Condition** : $a_{ij} = a_{ji}$ — les coefficients sont déterminés par la **partie triangulaire supérieure** (diagonale incluse).
- **Comptage** : 3 coefficients diagonaux + 3 coefficients hors diagonale (positions $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$) = 6.
- **Dimension** : 6.
- **Base** : les trois matrices E_{ii} (un 1 sur la diagonale) et les trois matrices $E_{ij} + E_{ji}$ pour $i < j$.
- **Formule générale** : $\dim S_n = \frac{n(n+1)}{2}$; ici $\frac{3 \times 4}{2} = 6$ ✓
- **Antisymétriques** : $\dim A_n = \frac{n(n-1)}{2} = 3$.
- **Contrôle** : $6 + 3 = 9 = \dim M_3(\mathbb{R})$ ✓ — les deux espaces sont **supplémentaires**.

Réponse. Dimension 6 ; base formée des E_{ii} et des $E_{ij} + E_{ji}$.

Correction de l'exercice 10 - Famille de fonctions

Supposons $a + be^x + ce^{2x} = 0$ pour tout réel x .

Méthode par limites.

- En divisant par e^{2x} : $ae^{-2x} + be^{-x} + c = 0$. Quand $x \rightarrow +\infty$, on obtient $c = 0$.
- Il reste $a + be^x = 0$; en divisant par e^x et en faisant $x \rightarrow +\infty$, $b = 0$.
- Puis $a = 0$.
- **Conclusion** : la famille est **libre** ✓

Méthode par évaluations. En $x = 0$, $x = \ln 2$ et $x = \ln 3$:

- $a + b + c = 0$; $a + 2b + 4c = 0$; $a + 3b + 9c = 0$.
- Le déterminant est un **Vandermonde** en 1, 2, 3, non nul — seule la solution nulle convient ✓
- **Généralisation** : $(e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x})$ est libre dès que les λ_i sont **distincts**. L'espace des fonctions est donc de dimension **infinie**.

Réponse. Libre (limites successives, ou Vandermonde).

Correction de l'exercice 11 - Coordonnées dans une base

- **Base** : le déterminant vaut $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1(1 - 0) - 0 + 1(1 - 0) = 2 \neq 0$ ✓
- **Système** : on cherche α, β, γ avec $\alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(1, 0, 1) = (2, 3, 1)$.

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 2 \\ \alpha + \beta = 3 \\ \beta + \gamma = 1 \end{cases}$$

- **Somme des trois** : $2(\alpha + \beta + \gamma) = 6$, donc $\alpha + \beta + \gamma = 3$.
 - Par différence avec chaque équation : $\beta = 3 - 2 = 1$, $\gamma = 3 - 3 = 0$, $\alpha = 3 - 1 = 2$.
 - **Coordonnées** : $(2, 1, 0)_B$.
 - **Vérification** : $2(1, 1, 0) + 1(0, 1, 1) + 0 = (2, 3, 1) \checkmark$
 - **Unicité** : garantie par le caractère de base — c'est la propriété fondamentale.
- Réponse.** $u = 2u_1 + u_2$, soit $(2, 1, 0)$ dans B .

Correction de l'exercice 12 - Sous-espace engendré

- F est un **plan vectoriel** (les deux vecteurs sont non colinéaires).
- **Vecteur normal** : par produit vectoriel,
 $(1, 2, 1) \wedge (2, 1, -1) = (2 \times (-1) - 1 \times 1, 1 \times 2 - 1 \times (-1), 1 \times 1 - 2 \times 2) = (-3, 3, -3)$
- On simplifie : $(1, -1, 1)$.
- **Équation** : $x - y + z = 0$.
- **Vérifications** : $1 - 2 + 1 = 0 \checkmark$ et $2 - 1 - 1 = 0 \checkmark$
- **Méthode alternative (sans produit vectoriel)** : un vecteur (x, y, z) est dans F si le système $\alpha(1, 2, 1) + \beta(2, 1, -1) = (x, y, z)$ est compatible ; l'échelonnement fait apparaître la condition $x - y + z = 0$.
- **Contrôle de cohérence** : F est de dimension 2, et une équation dans $\mathbb{R}^3$ définit bien un espace de dimension 2 $\checkmark$

Réponse. $F : x - y + z = 0$.

Correction de l'exercice 13 - Réunion de deux sous-espaces

- a)** $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont dans la réunion des axes, mais leur somme $(1, 1)$ n'est sur aucun axe : la réunion n'est pas stable par addition.
- b)** Si $F \subset G$, $F \cup G = G$ est un sous-espace. Réciproquement, supposons $F \cup G$ sous-espace et $F \not\subset G$: il existe $x \in F \setminus G$. Soit $y \in G$; $x + y \in F \cup G$.
- Si $x + y \in G$, alors $x = (x + y) - y \in G$: contradiction. Donc $x + y \in F$, puis $y = (x + y) - x \in F$.
 - Tout $y \in G$ est dans F : $G \subset F$.

$$F \cup G \text{ sous-espace} \Leftrightarrow F \subset G \text{ ou } G \subset F$$

c) $F + G$ est un sous-espace (stable par combinaison) et contient F et G (prendre $y = 0$ ou $x = 0$). Tout sous-espace contenant $F \cup G$ contient les sommes $x + y$, donc contient $F + G$.

d) $F \cup G$: le plan et la droite verticale, qui n'est pas un sous-espace (par b), aucun n'est inclus dans l'autre). $F + G = \mathbb{R}^3$: tout $(x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z)$, et même $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ ($F \cap G = \{0\}$).

Réponse. $F \cup G$ sous-espace $\Leftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$; $F + G$ est le plus petit sous-espace contenant $F \cup G$.

Correction de l'exercice 14 - Espace des suites de Fibonacci

- a)** La suite nulle convient ; si $u, v \in S$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
 $(\lambda u + v)_{n+2} = \lambda u_{n+1} + \lambda u_n + v_{n+1} + v_n = (\lambda u + v)_{n+1} + (\lambda u + v)_n$.
- b)** L'application est linéaire. Une suite de S est entièrement déterminée par (u_0, u_1)

(récurrence) et tout couple convient : bijection. Donc

$$\dim S = \dim \mathbb{R}^2 = 2$$

c) $\varphi^{n+2} = \varphi^n \varphi^2 = \varphi^n(\varphi + 1) = \varphi^{n+1} + \varphi^n$ ✓ (de même pour ψ). Leurs images $(1, \varphi)$ et $(1, \psi)$ sont libres car $\varphi \neq \psi$: deux vecteurs libres dans un espace de dimension 2 forment une base.

d) $F_n = \alpha \varphi^n + \beta \psi^n$ avec $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha \varphi + \beta \psi = 1$, d'où $\alpha = \frac{1}{\varphi - \psi} = \frac{1}{\sqrt{5}}$:

— $F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$, avec $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. **Contrôle** :

$$F_2 = \frac{\varphi^2 - \psi^2}{\sqrt{5}} = \frac{(\varphi - \psi)(\varphi + \psi)}{\sqrt{5}} = 1 \quad \checkmark$$

Réponse. $\dim S = 2$, base $(\varphi^n), (\psi^n)$; $F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : intersection et somme

— **Dimensions** : $\dim F = \dim G = 2$ (générateurs non colinéaires dans chaque cas).

Intersection. Un vecteur de F s'écrit $a(1, 1, 0, 0) + b(0, 0, 1, 1) = (a, a, b, b)$; un vecteur de G s'écrit (c, d, c, d) .

— **Égalité** : $a = c, a = d, b = c, b = d$ — donc $a = b = c = d$.

— $F \cap G = \text{Vect}((1, 1, 1, 1))$, de **dimension 1**.

Somme. Par **Grassmann** :

$$\dim(F + G) = 2 + 2 - 1 = 3$$

— $F + G$ est donc un **hyperplan** de $\mathbb{R}^4$: la somme n'est pas directe, et $F + G \neq \mathbb{R}^4$.

— **Équation de $F + G$** : un vecteur s'écrit $(a + c, a + d, b + c, b + d)$, dont les coordonnées vérifient $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$ ✓

— **Contrôle** : $(1, 0, 0, 0)$ ne satisfait pas cette équation, il n'est donc pas dans $F + G$ — ce qui confirme $\dim(F + G) = 3$ ✓

Réponse. $\dim(F \cap G) = 1$ et $\dim(F + G) = 3$.