

Plaque 4 - Dimension, sommes et supplémentaires

Espaces vectoriels — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

La **dimension** est un outil de preuve : en dimension finie, pour montrer que deux sous-espaces sont **supplémentaires**, il suffit de vérifier $F \cap G = \{0\}$ **et** $\dim F + \dim G = \dim E$; pour montrer une égalité $F = G$, une inclusion et l'égalité des dimensions suffisent. La **formule de Grassmann** relie somme et intersection. On décompose ensuite explicitement un vecteur selon une somme directe, ce qui définit les **projecteurs**.

Exercice 1 - Formule de Grassmann dans $\mathbb{R}^4$

Soient $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \text{Vect}(v_1, v_2)$ avec $u_1 = (1, 0, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0, 1)$, $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1, 1)$.

- Donner $\dim F$ et $\dim G$.
- Calculer $\dim(F + G)$ en échelonnant (u_1, u_2, v_1, v_2) .
- En déduire $\dim(F \cap G)$ et déterminer $F \cap G$.
- La somme $F + G$ est-elle directe ?

Exercice 2 - Fonctions paires et impaires

Soit $E = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, P les fonctions paires et I les fonctions impaires.

- Montrer que $P \cap I = \{0\}$.
- Montrer que toute f s'écrit $f = g + h$ avec $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ paire et $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ impaire. Conclure.
- Décomposer $f = \exp$.
- Dans $\mathbb{R}_n[X]$, quels sont les polynômes pairs et impairs ? Vérifier la formule des dimensions.

Exercice 3 - Trois droites du plan

Dans $\mathbb{R}^2$, soient $D_1 = \text{Vect}(1, 0)$, $D_2 = \text{Vect}(0, 1)$, $D_3 = \text{Vect}(1, 1)$.

- Vérifier que $D_i \cap D_j = \{0\}$ pour $i \neq j$.
- Montrer que la somme $D_1 + D_2 + D_3$ n'est **pas** directe (trouver deux écritures de 0).
- Donner le bon critère : la somme $F_1 + F_2 + F_3$ est directe si et seulement si $\dim(F_1 + F_2 + F_3) = \dim F_1 + \dim F_2 + \dim F_3$.
- Vérifier ce critère sur l'exemple.

Exercice 4 - Supplémentaires d'une droite

Dans $\mathbb{R}^3$, soit $D = \text{Vect}(1, 1, 1)$.

- Montrer que $P_1: z = 0$ est un supplémentaire de D .
- Montrer que $P_2: x + y + z = 0$ en est un autre. Un supplémentaire est-il unique ?
- Décomposer $u = (1, 2, 6)$ selon $D \oplus P_1$, puis selon $D \oplus P_2$.
- À quelle condition sur $(a, b, c) \neq 0$ le plan $ax + by + cz = 0$ est-il un supplémentaire de D ?

Exercice 5 - Deux plans de l'espace

- Montrer que deux plans vectoriels distincts de $\mathbb{R}^3$ se coupent selon une droite (Grassmann).
- Deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^4$ peuvent-ils ne se couper qu'en 0 ? Donner un exemple.
- Montrer que dans $\mathbb{R}^n$, deux sous-espaces de dimensions p et q avec $p + q > n$ ont une intersection non nulle.
- Application : montrer qu'il existe un polynôme non nul de $\mathbb{R}_3[X]$ à la fois pair et nul en 1 (comparer les dimensions des deux sous-espaces), et le déterminer.

Exercice 6 - Polynômes nuls en 0 et 1

Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, soient $F = \{P: P(0) = P(1) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_1[X]$.

- Donner une base et la dimension de F .
- Montrer que $E = F \oplus G$.
- Décomposer X^3 selon cette somme directe.
- Interpréter la composante sur G : c'est le polynôme d'interpolation de quoi ?

Exercice 7 - Trace nulle et matrices scalaires

Dans $M_n(\mathbb{R})$, soient T les matrices de trace nulle et $D = \text{Vect}(I_n)$.

- Montrer que $T \cap D = \{0\}$.
- En déduire $M_n(\mathbb{R}) = T \oplus D$ (dimensions).
- Donner la décomposition explicite de M .
- Décomposer $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 - Divisibilité et somme directe de polynômes

Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, soient $F = \{X^2A: A \in \mathbb{R}_1[X]\}$ et $G = \{(X-1)^2B: B \in \mathbb{R}_1[X]\}$.

- Donner les dimensions de F et G .
- Montrer que $F \cap G = \{0\}$ et en déduire $E = F \oplus G$.
- En déduire l'existence de $A, B \in \mathbb{R}_1[X]$ tels que $X^2A + (X-1)^2B = 1$ (relation de Bézout). Les calculer.
- Vérifier en $X = 0, 1, 2$.

Exercice 9 - Dimension de Vect selon un paramètre

Pour $m \in \mathbb{R}$, soit $F_m = \text{Vect}((1, m, 1), (m, 1, 1), (1, 1, m))$ dans $\mathbb{R}^3$.

- Calculer le rang de la famille selon m (déterminant de la plaquette 3).
- En déduire $\dim F_m$.
- Pour $m = -2$, donner une équation cartésienne de F_{-2} .
- Pour quelles valeurs de m la droite $\text{Vect}(1, 1, 1)$ est-elle contenue dans F_m ?

Exercice 10 - Suites convergentes

Soient C l'espace des suites convergentes, C_0 celles de limite nulle et K les suites constantes.

- Montrer que C_0 et K sont des sous-espaces de C .
- Montrer que $C = C_0 \oplus K$ et donner la décomposition de $u \in C$.
- Décomposer $u_n = 2 + \frac{1}{n}$ (pour $n \geq 1$).
- L'espace C est-il de dimension finie ?

Exercice 11 - Fonctions continues nulles en 0

Dans $E = C(\mathbb{R})$, soient $F = \{f: f(0) = 0\}$ et G les fonctions constantes.

- Montrer que $E = F \oplus G$.
- Montrer que $H = \{f: f(0) = f(1)\}$ est aussi un sous-espace, et que $E = H \oplus \text{Vect}(x \mapsto x)$.
- Décomposer $f = \exp$ dans chacune des deux sommes.
- Ces deux décompositions définissent-elles la même projection sur un même sous-espace ?

Exercice 12 - Intersection d'hyperplans

Dans $\mathbb{R}^n$, soient $H_1 = \ker \varphi_1$ et $H_2 = \ker \varphi_2$ deux hyperplans (φ_1, φ_2 formes linéaires non nulles).

- Montrer que $\dim(H_1 \cap H_2) \geq n - 2$.
- Montrer que $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$ si et seulement si $H_1 \neq H_2$.
- Généraliser : l'intersection de k hyperplans est de dimension $\geq n - k$.
- Application : dans $\mathbb{R}^4$, $x + y + z + t = 0$ et $x - y + z - t = 0$: dimension et base de l'intersection.

Exercice 13 - Décomposer dans une somme directe de $\mathbb{R}^3$

Soient $F = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 1))$ et $G = \text{Vect}(1, 1, 0)$.

- Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ (déterminant des trois vecteurs).
- Décomposer $u = (3, 1, 2)$ selon $F \oplus G$.
- Donner une équation cartésienne de F .
- Écrire la formule générale de la projection p sur F parallèlement à G .

Exercice 14 - Une inclusion et les dimensions

- a) Soient $F \subset G$ deux sous-espaces de dimension finie. Montrer que $\dim F = \dim G \Rightarrow F = G$.
- b) Application : montrer que $\text{Vect}(1 + X, 1 - X) = \mathbb{R}_1[X]$.
- c) Montrer que $\{P \in \mathbb{R}_2[X] : P(1) = 0\} = \text{Vect}(X - 1, X^2 - 1)$.
- d) Donner un contre-exemple en dimension infinie : $F \subset G$, $F \neq G$, mais « aussi gros » (une bijection linéaire entre eux).

Exercice 15 - Synthèse : polynômes symétriques par rapport à 1/2

Soit $n \geq 1$ et $E_n = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : P(1 - X) = P(X)\}$.

- a) Montrer que E_n est un sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$.
- b) Montrer que $P \in E_n$ si et seulement si $P = Q\left(\left(X - \frac{1}{2}\right)^2\right)$ avec Q un polynôme.
- c) En déduire une base de E_n et montrer que $\dim E_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$.
- d) Montrer que $\mathbb{R}_n[X] = E_n \oplus A_n$ avec $A_n = \{P : P(1 - X) = -P(X)\}$, et vérifier les dimensions pour $n = 3$.