

Plaquette 5 – Espaces vectoriels en action : synthèse

Espaces vectoriels — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

La notion d'espace vectoriel unifie des objets très différents : suites récurrentes, solutions d'équations différentielles, polynômes trigonométriques, mots de code, nombres algébriques. Dans chaque situation, on **identifie l'espace** et le corps des scalaires, on **montre la structure** (sous-espace d'un espace connu), on **calcule la dimension** (souvent par une bijection linéaire avec K^n ou par une base explicite), puis on **exploite** la base pour résoudre le problème concret.

Exercice 1 – Polynômes trigonométriques

Soit $T_n = \text{Vect}(1, \cos x, \sin x, \dots, \cos(nx), \sin(nx))$.

- Montrer que la famille génératrice est libre (multiplier par $\cos(mx)$ ou $\sin(mx)$ et intégrer sur $[0; 2\pi]$). En déduire $\dim T_n$.
- Montrer que T_n est stable par dérivation.
- Montrer que $\cos^3 x \in T_3$ et donner ses coordonnées.
- Montrer que le produit de deux éléments de T_1 est dans T_2 .

Exercice 2 – Récurrence à racine double

Soit S l'ensemble des suites vérifiant $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

- Justifier que $\dim S = 2$.
- Montrer que (2^n) et $(n2^n)$ sont dans S et forment une base.
- Déterminer la suite de S telle que $v_0 = 1$, $v_1 = 0$, et vérifier v_2, v_3 .
- Pourquoi les seules suites géométriques ne suffisent-elles pas ici ?

Exercice 3 – Équation différentielle d'ordre 2

Soit $E = \{y \in C^2(\mathbb{R}) : y'' - 3y' + 2y = 0\}$.

- Montrer que E est un sous-espace et que $x \mapsto e^{rx}$ est dans E si et seulement si $r^2 - 3r + 2 = 0$.
- En déduire deux éléments de E et montrer qu'ils sont libres.
- On admet $\dim E = 2$. Résoudre avec $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
- Déterminer l'ensemble des solutions de $y'' - 3y' + 2y = 4$.

Exercice 4 – Conditions d'Hermite et dimension

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_5[X] : P(0) = P'(0) = P(1) = P'(1) = 0\}$.

- Montrer que F est un sous-espace et que $P \in F \Leftrightarrow X^2(X-1)^2 \mid P$.
- En déduire une base et la dimension de F .
- Retrouver la dimension par « 6 inconnues, 4 équations indépendantes ».

d) Montrer que $\mathbb{R}_5[X] = F \oplus \mathbb{R}_3[X]$ et interpréter la composante sur $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 5 - Code de parité

On travaille dans $F_2^n = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ (calculs modulo 2). Le **code de parité** est $C = \{x: x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$.

- Montrer que C est un sous-espace de F_2^n et donner sa dimension.
- Combien de mots contient C ? Le vérifier pour $n = 3$ en les listant.
- Montrer qu'une erreur sur un seul bit est **détectée**, mais pas corrigée.
- Comparer avec le code de Hamming (plaquette de calcul matriciel) : dimension, nombre de mots, capacité de correction.

Exercice 6 - Carrés semi-magiques

Un carré **semi-magique** 3×3 a ses trois lignes et ses trois colonnes de même somme (sans condition sur les diagonales).

- Montrer que l'ensemble S des carrés semi-magiques est un sous-espace de $M_3(\mathbb{R})$.
- On admet que les cinq conditions « même somme que la ligne 1 » sont de rang 4. En déduire $\dim S$.
- Montrer que les matrices de **permutation** 3×3 sont semi-magiques. Combien y en a-t-il ?
- Comparer $\dim S$ avec la dimension des carrés magiques (plaquette 2).

Exercice 7 - La dérivation sur les polynômes

Soit $D: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$, $P \mapsto P'$.

- Montrer que D est linéaire.
- Déterminer son noyau et son image.
- Vérifier la relation $\dim \ker D + \dim \operatorname{Im} D = n + 1$.
- Montrer que $D^{n+1} = 0$ et que $D^n \neq 0$. Écrire la matrice de D dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ pour $n = 3$.

Exercice 8 - Suites périodiques

Soit P_3 l'ensemble des suites réelles de période 3 ($u_{n+3} = u_n$).

- Montrer que P_3 est un sous-espace de dimension 3.
- Donner une base « canonique » (suites valant 1 une fois sur trois).
- Avec $j = e^{2i\pi/3}$, montrer que les suites complexes (1) , (j^n) , (j^{2n}) sont de période 3, et en déduire une base réelle (1) , $(\cos \frac{2n\pi}{3})$, $(\sin \frac{2n\pi}{3})$.
- Décomposer la suite $1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots$ dans cette base.

Exercice 9 - $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel réel

- a) Montrer que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de base $(1, i)$; quelle est sa dimension sur $\mathbb{C}$?
- b) La famille $(1 + i, 1 - i)$ est-elle libre sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?
- c) Montrer que $\mathbb{C}^2$ est un $\mathbb{R}$ -espace de dimension 4 et en donner une base.
- d) L'ensemble $\mathbb{R}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$ -espace ? Comme $\mathbb{C}$ -espace ?

Exercice 10 - Le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

Soit $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

- a) Montrer que c'est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de base $(1, \sqrt{2})$ (utiliser l'irrationalité de $\sqrt{2}$).
- b) Montrer qu'il est stable par produit, et que l'inverse d'un élément non nul y appartient.
- c) Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
- d) En déduire que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est libre sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 11 - Espace stable par dérivation

Soit $F = \{x \mapsto (ax + b)e^x : a, b \in \mathbb{R}\}$.

- a) Montrer que F est un sous-espace de dimension 2, de base (f_1, f_2) avec $f_1(x) = e^x$ et $f_2(x) = xe^x$.
- b) Montrer que F est stable par dérivation et écrire la matrice M de la dérivation dans cette base.
- c) En déduire la dérivée n -ième de $x \mapsto xe^x$ en calculant M^n .
- d) Trouver une primitive de $x \mapsto xe^x$ en inversant M .

Exercice 12 - Espace engendré par les puissances d'une matrice

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ et $K(A) = \text{Vect}(I_2, A, A^2, A^3, \dots)$.

- a) Montrer, avec Cayley-Hamilton, que $K(A) = \text{Vect}(I_2, A)$, donc $\dim K(A) \leq 2$.
- b) Quand a-t-on $\dim K(A) = 1$?
- c) Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculer A^5 , puis la somme de la série $\sum \frac{A^k}{k!}$ en fonction de I_2 et A (on admettra la convergence).
- d) Comparer avec $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$.

Exercice 13 - Rang d'une famille de sinusôides

Soient $a_1, \dots, a_p$ des réels et $g_k(x) = \sin(x + a_k)$.

- a) Montrer que chaque g_k appartient à $\text{Vect}(\sin, \cos)$.
- b) En déduire que le rang de $(g_1, \dots, g_p)$ est au plus 2.
- c) Montrer que (g_1, g_2) est libre si et seulement si $a_1 - a_2 \notin \pi\mathbb{Z}$.

d) Application physique : la somme de signaux $\sin(\omega t + \varphi_k)$ de même pulsation est-elle toujours un signal de même forme ?

Exercice 14 - Dimension d'un espace de matrices

Soit D l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec **toutes** les matrices diagonales.

- Montrer que D est un sous-espace.
- En utilisant $\text{diag}(1, 2, \dots, n)$, montrer que D est l'ensemble des matrices diagonales.
- En déduire $\dim D$.
- Quelle est la dimension de l'espace des matrices qui commutent avec $\text{diag}(1, 1, 2)$?

Exercice 15 - Synthèse : récurrence linéaire d'ordre 3

Soit S l'ensemble des suites vérifiant $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.

- Montrer que S est un espace vectoriel de dimension 3.
- Factoriser le polynôme caractéristique $X^3 - 2X^2 - X + 2$ et en déduire une base de suites géométriques.
- Déterminer la suite de S telle que $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 1$ (résoudre un système 3×3).
- Vérifier sur u_3, u_4 et reconnaître la suite (termes 0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, ...).