

Plaquette 3 – Familles libres, génératrices et bases

Espaces vectoriels — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Pour étudier une famille, on écrit une **relation de dépendance** $\sum \lambda_i u_i = 0$ et on cherche si elle force $\lambda_i = 0$. Dans K^n , c'est un système homogène : on **échelonne** la matrice dont les colonnes sont les vecteurs, et le **rang** donne tout (libre, génératrice, relations). Pour des polynômes, on exploite les **degrés** ; pour des fonctions, on **évalue** en des points bien choisis, on **dérive** ou on étudie des **limites**. On termine en calculant des **coordonnées** dans des bases adaptées (Lagrange, Taylor, Bernstein).

Exercice 1 – Rang d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$

Soient $u_1 = (1, 2, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1, 1)$, $u_3 = (1, 3, 1, 2)$, $u_4 = (1, 0, 1, 0)$.

- Former la matrice des colonnes et l'échelonner.
- La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre ? Donner une relation de dépendance.
- Extraire une famille libre maximale et donner la dimension de $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_4)$.
- F est-il égal à $\mathbb{R}^4$? Donner une équation cartésienne de F .

Exercice 2 – Polynômes de degrés échelonnés

- Soient $P_0, \dots, P_n$ des polynômes avec $\deg P_k = k$. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $K_n[X]$.
- En déduire que $(1, X + 1, (X + 1)^2, X^3 - X)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
- La famille $(X^2 + X, X^2 - X, X^2)$ est-elle libre ? Les degrés sont-ils échelonnés ?
- Montrer que $(X^2 + X, X^2 - X, 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 3 – Base de Lagrange

Aux nœuds 0, 1, 2, on considère $L_0 = \frac{(X-1)(X-2)}{2}$, $L_1 = -X(X-2)$, $L_2 = \frac{X(X-1)}{2}$.

- Calculer $L_i(j)$ pour $i, j \in \{0, 1, 2\}$.
- En déduire que (L_0, L_1, L_2) est libre, puis une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
- Montrer que les coordonnées de P dans cette base sont $(P(0), P(1), P(2))$.
- Décomposer X^2 et 1 dans cette base.

Exercice 4 – Base de Taylor

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la famille $T_a = (1, X - a, (X - a)^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

- Justifier que T_a est une base.
- Montrer que les coordonnées de P dans T_a sont $(P(a), P'(a), \frac{P''(a)}{2})$.

- c) Décomposer $P = 2X^2 - X + 3$ dans T_1 et vérifier.
 d) En déduire, sans calcul, si 1 est racine double de P .

Exercice 5 - Liberté des exponentielles

Soient $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ des réels et $f_k(x) = e^{a_k x}$.

- a) Cas $n = 2$: montrer que (f_1, f_2) est libre en évaluant en 0 et en dérivant.
 b) Cas général : on suppose $\sum \lambda_k f_k = 0$ et $\lambda_n \neq 0$. Diviser par $e^{a_n x}$ et faire tendre x vers $+\infty$ pour obtenir une contradiction.
 c) En déduire que $(x \mapsto e^{kx})_{0 \leq k \leq n}$ est libre, et que l'espace des fonctions réelles est de dimension infinie.
 d) La famille $(\text{ch}, \text{sh}, \exp)$ est-elle libre ?

Exercice 6 - Familles de fonctions trigonométriques

- a) Montrer que $(\cos, \sin)$ est libre.
 b) Montrer que $(\cos, \sin, x \mapsto \sin(x+1))$ est liée et donner la relation.
 c) Montrer que $(x \mapsto x, x \mapsto |x|)$ est libre sur $\mathbb{R}$, mais liée sur $[0; 1]$.
 d) Montrer que $(1, \cos x, \cos 2x)$ est libre (évaluer en $0, \frac{\pi}{2}, \pi$).

Exercice 7 - Extraire une base

Soient dans $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (2, 1, 3)$, $v_3 = (0, 1, 1)$, $v_4 = (1, 1, 1)$.

- a) Montrer que la famille est génératrice de $\mathbb{R}^3$ mais pas libre.
 b) Extraire une base de $\mathbb{R}^3$ de cette famille.
 c) Exprimer v_3 en fonction de v_1 et v_2 .
 d) Donner les coordonnées de $(3, 3, 5)$ dans la base extraite.

Exercice 8 - Compléter en une base

Dans $\mathbb{R}^4$, soient $w_1 = (1, 1, 0, 0)$ et $w_2 = (0, 1, 1, 0)$.

- a) Montrer que (w_1, w_2) est libre.
 b) Compléter (w_1, w_2) en une base de $\mathbb{R}^4$ par des vecteurs de la base canonique (échelonner $(w_1, w_2, e_1, e_2, e_3, e_4)$).
 c) Vérifier que la base obtenue est bien libre (déterminant ou échelonnement).
 d) Proposer un supplémentaire de $\text{Vect}(w_1, w_2)$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 9 - Base selon un paramètre

Pour $a \in \mathbb{R}$, soient $u = (1, 1, a)$, $v = (1, a, 1)$, $w = (a, 1, 1)$.

- a) Calculer le déterminant de la matrice $(u \mid v \mid w)$ et le factoriser.
 b) Pour quelles valeurs de a la famille est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
 c) Pour $a = 1$, quel est le rang ? Pour $a = -2$? Donner une relation dans ce dernier

cas.

d) Pour $a = 0$, donner les coordonnées de $(1, 1, 1)$.

Exercice 10 - Changement de famille

Soit (u, v, w) une famille d'un espace vectoriel réel.

a) Montrer que $(u + v, v + w, w + u)$ est libre si et seulement si (u, v, w) l'est.

b) Montrer que $\text{Vect}(u + v, v + w, w + u) = \text{Vect}(u, v, w)$.

c) La famille $(u - v, v - w, w - u)$ est-elle libre quand (u, v, w) l'est ?

d) Interpréter avec la matrice de passage $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 - Liberté des $\cos(kx)$ par les intégrales

Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $c_k(x) = \cos(kx)$.

a) Rappeler que $\int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(mx) dx$ vaut 0 si $k \neq m$, π si $k = m \geq 1$, et 2π si $k = m = 0$.

b) En déduire que $(c_0, c_1, \dots, c_n)$ est libre pour tout n .

c) Soit $f = 3 + 2 \cos x - \cos 3x$. Retrouver ses coefficients par intégration.

d) Pourquoi cette méthode est-elle plus puissante que l'évaluation en quelques points ?

Exercice 12 - Famille de suites

On considère les suites $a = (1)_n$, $b = (n)_n$, $c = (n^2)_n$ et $d = (2^n)_n$.

a) Montrer que (a, b, c) est libre en regardant les termes $n = 0, 1, 2$.

b) Montrer que (a, b, c, d) est libre (diviser par 2^n et faire tendre $n \rightarrow +\infty$).

c) La suite $(n^2 + 3n + 2)$ est-elle dans $\text{Vect}(a, b, c)$? Et $(2^{n+1} - 1)$ dans $\text{Vect}(a, d)$?

d) Montrer que la suite $((n + 1)^2)$ est combinaison de a, b, c et donner ses coordonnées.

Exercice 13 - Unicité des coordonnées

a) Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur s'écrit de façon **unique** comme combinaison des e_i .

b) Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$ est génératrice. Donner deux écritures différentes de $(2, 3)$.

c) Dans $\mathbb{R}_2[X]$, la famille $(1 + X, 1 - X, X^2)$ est une base : donner les coordonnées de $3 + X + 4X^2$.

d) Pourquoi l'unicité des coordonnées est-elle essentielle pour définir une application linéaire par l'image d'une base ?

Exercice 14 – Vecteurs propres et liberté

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et X_1, X_2, X_3 non nuls avec $AX_i = \lambda_i X_i$, où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont **distincts**.

a) Montrer que (X_1, X_2) est libre (appliquer A à une relation, puis combiner).

b) Montrer que (X_1, X_2, X_3) est libre.

c) Application : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Vérifier que $X_1 = (3, -3, 1)$, $X_2 = (0, -2, 1)$ et

$X_3 = (0, 0, 1)$ sont vecteurs propres, donner leurs valeurs propres et conclure.

d) Que peut-on dire de n vecteurs propres associés à n valeurs propres distinctes en dimension n ?

Exercice 15 – Synthèse : la base de Bernstein

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $B_0 = (1 - X)^2$, $B_1 = 2X(1 - X)$, $B_2 = X^2$.

a) Montrer que (B_0, B_1, B_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

b) Décomposer $1, X$ et X^2 dans cette base.

c) Écrire la matrice de passage P de la base $(1, X, X^2)$ à (B_0, B_1, B_2) et calculer P^{-1} grâce à b).

d) Décomposer $Q = 1 + 2X - X^2$ et vérifier que ses coordonnées sont $(Q(0), Q(0) + \frac{1}{2}Q'(0), Q(1))$.