

Plaquette 2 - Reconnaître et décrire des sous-espaces

Espaces vectoriels — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Pour montrer qu'une partie F est un **sous-espace**, on vérifie $0 \in F$ et la stabilité par combinaison linéaire ; mieux, on la reconnaît comme un **noyau** (ensemble des solutions d'équations linéaires homogènes) ou un **sous-espace engendré**. Pour montrer qu'elle **n'en est pas un**, un **contre-exemple** précis suffit (vecteur nul absent, somme ou multiple qui sort). On termine en **décrivant** le sous-espace : une base et sa dimension, obtenues en résolvant les équations.

Exercice 1 - Plans et droites de $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^3$: $F = \{(x, y, z) : x + 2y - z = 0\}$, $G = \{(x, y, z) : x - y + z = 0\}$ et $H = \{(x, y, z) : x + y + z = 1\}$.

- Montrer que F et G sont des sous-espaces et que H n'en est pas un.
- Donner une base et la dimension de F .
- Déterminer $F \cap G$ (base et dimension).
- Interpréter géométriquement.

Exercice 2 - Parties d'un espace de fonctions

Dans l'espace $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, lesquelles des parties suivantes sont des sous-espaces ? Justifier chaque réponse.

- $A = \{f : f(0) = 0\}$ et $B = \{f : f(0) = 1\}$.
- $C = \{f : f \text{ paire}\}$ et $D = \{f : f \text{ bornée}\}$.
- $E_1 = \{f : f \text{ croissante}\}$.
- $E_2 = \{f : \forall x, f(x+1) = 2f(x)\}$.

Exercice 3 - Parties d'un espace de suites

Dans l'espace des suites réelles, étudier si les parties suivantes sont des sous-espaces.

- Les suites convergentes ; les suites de limite 1.
- Les suites arithmétiques. Donner une base de cet ensemble.
- Les suites géométriques.
- Les suites (u_n) telles que $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$: sous-espace ? dimension ? base de suites géométriques ?

Exercice 4 - Polynômes s'annulant en un point

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(1) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(1) = P'(1) = 0\}$.

- Montrer que F et G sont des sous-espaces de $\mathbb{R}_3[X]$.

- b) Montrer que $F = \{(X-1)Q : Q \in \mathbb{R}_2[X]\}$ et en déduire une base et la dimension de F .
 c) Même question pour G .
 d) Retrouver $\dim F$ en voyant F comme le noyau d'une forme linéaire.

Exercice 5 - Matrices symétriques, antisymétriques, de trace nulle

Dans $M_n(\mathbb{R})$, on considère S_n (symétriques), A_n (antisymétriques) et T_n (trace nulle).

- a) Montrer que ce sont des sous-espaces.
 b) Pour $n = 2$, donner une base de chacun.
 c) Montrer que $\dim S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim A_n = \frac{n(n-1)}{2}$.
 d) Montrer que $\dim T_n = n^2 - 1$ et vérifier que $\dim S_n + \dim A_n = n^2$.

Exercice 6 - Noyau d'une matrice rectangulaire

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- a) Montrer que $\ker A = \{X \in \mathbb{R}^4 : AX = 0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$.
 b) Résoudre et donner une base de $\ker A$.
 c) Vérifier la formule $\dim \ker A = 4 - \operatorname{rg} A$.
 d) Le vecteur $(1, 1, 1, 1)$ est-il dans $\ker A$? Et $(-2, 1, 0, 0)$?

Exercice 7 - Espace des solutions d'une équation différentielle

Soit $E = \{y \in C^2(\mathbb{R}) : y'' + y = 0\}$ et $E_1 = \{y \in C^2(\mathbb{R}) : y'' + y = 1\}$.

- a) Montrer que E est un sous-espace et que E_1 n'en est pas un.
 b) Vérifier que $\cos$ et $\sin$ sont dans E et forment une famille libre.
 c) On admet que $\dim E = 2$. En déduire E , puis montrer que $E_1 = 1 + E$.
 d) Déterminer la solution de $y'' + y = 1$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 8 - Sous-espace engendré par des fonctions

Soit $F = \operatorname{Vect}(1, \cos^2, \sin^2)$ dans l'espace des fonctions réelles.

- a) Montrer que la famille $(1, \cos^2, \sin^2)$ est liée.
 b) Montrer que $F = \operatorname{Vect}(1, \cos 2x)$ (on notera $x \mapsto \cos 2x$).
 c) Montrer que $(1, x \mapsto \cos 2x)$ est libre et en déduire $\dim F$.
 d) La fonction $x \mapsto \cos^4 x - \sin^4 x$ appartient-elle à F ?

Exercice 9 - Hyperplan et droite supplémentaire

Dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), soient $H = \{x : x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$ et $D = \operatorname{Vect}(1, 1, \dots, 1)$.

- a) Montrer que H est un hyperplan (dimension $n - 1$) et en donner une base.
 b) Montrer que $H \cap D = \{0\}$.

- c) En déduire que $\mathbb{R}^n = H \oplus D$, et décomposer explicitement un vecteur x .
 d) Application : $n = 3$, $x = (4, 1, 1)$.

Exercice 10 - Commutant d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $C(A) = \{M \in M_2(\mathbb{R}) : AM = MA\}$.

- a) Montrer que $C(A)$ est un sous-espace de $M_2(\mathbb{R})$.
 b) Écrire les équations sur $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et résoudre.
 c) En déduire une base et la dimension de $C(A)$, et montrer que $C(A) = \text{Vect}(I_2, A)$.
 d) Montrer que $C(A)$ est stable par produit.

Exercice 11 - Polynômes invariants par translation

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(X+1) = P(X)\}$.

- a) Montrer que F est un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$.
 b) Montrer que F est l'ensemble des polynômes constants (considérer $P - P(0)$ et ses racines).
 c) Soit $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(X+1) - P(X) \in \mathbb{R}_1[X]\}$. Montrer que G est un sous-espace et que $G = \mathbb{R}_2[X]$.
 d) Quelle est la dimension de G ?

Exercice 12 - Matrices annulées par une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in M_2(\mathbb{R}) : AM = 0\}$.

- a) Montrer que F est un sous-espace.
 b) Montrer que $AM = 0$ si et seulement si chaque colonne de M est dans $\ker A$. Déterminer $\ker A$.
 c) En déduire une base et la dimension de F .
 d) Même question pour $G = \{M : MA = 0\}$.

Exercice 13 - Démontrer qu'une partie n'est pas un sous-espace

Pour chaque partie de $\mathbb{R}^2$, dire si c'est un sous-espace ; sinon, donner un contre-exemple **précis**.

- a) $P_1 = \{(x, y) : xy = 0\}$.
 b) $P_2 = \{(x, y) : x^2 = y^2\}$.
 c) $P_3 = \{(x, y) : x \geq 0\}$.
 d) $P_4 = \{(x, y) : 2x - 3y = 0\}$ et $P_5 = \{(x, y) : x = y^2\}$.

Exercice 14 – Fonctions polynomiales par morceaux

Soit F l'ensemble des fonctions continues $f:[0;2] \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont affines sur $[0;1]$ et sur $[1;2]$.

- Montrer que F est un sous-espace de $C([0;2])$.
- Montrer que $f \mapsto (f(0), f(1), f(2))$ est une bijection linéaire de F sur $\mathbb{R}^3$. En déduire $\dim F$.
- Donner la base de F correspondant à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (fonctions « chapeaux »).
- Écrire $f(x) = |x - 1|$ dans cette base.

Exercice 15 – Synthèse : l'espace des carrés magiques

Un **carré magique** 3×3 (à coefficients réels) est une matrice dont les trois lignes, les trois colonnes et les deux diagonales ont la **même somme** s .

- Montrer que l'ensemble M des carrés magiques est un sous-espace de $M_3(\mathbb{R})$ (les conditions « même somme » sont des équations linéaires homogènes).

- Vérifier que J (tous les coefficients égaux à 1), $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ sont magiques.}$$

- On admet que $\dim M = 3$ (sept équations « somme égale à celle de la première ligne », de rang 6). Montrer que (J, M_1, M_2) est une base.

- Décomposer le carré de Lo Shu $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ dans cette base.