

Plaquette 1 - Sous-espaces, familles libres, bases et dimension

Espaces vectoriels — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

On reconnaît un **sous-espace vectoriel** par la caractérisation, on teste la **liberté** d'une famille, on extrait ou complète une **base**, et on calcule des dimensions (somme, intersection, Grassmann).

Exercice 1 - Reconnaître un sous-espace

Lesquels de ces ensembles sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$?

- a) $F = \{(x, y, z) \mid 2x - y + z = 0\}$
- b) $G = \{(x, y, z) \mid x + y = 2\}$
- c) $H = \{(x, y, z) \mid x^2 = y^2\}$

Exercice 2 - Famille libre

La famille $((1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3 - Base d'un plan

Déterminer une base et la dimension de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

Exercice 4 - Espace de polynômes

Déterminer une base et la dimension de $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$.

Exercice 5 - Rang d'une famille

Déterminer le rang de $((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 0, -1))$.

Exercice 6 - Théorème de la base incomplète

Compléter $((1, 1, 1), (1, 2, 3))$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7 - Somme directe

Dans $\mathbb{R}^3$, soient $F = \text{Vect}((1, 1, 0))$ et $G = \{(x, y, z) \mid x + y = 0\}$. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Exercice 8 - Formule de Grassmann

Dans $\mathbb{R}^4$, soient F et G de dimensions 3 et 2. Quelles sont les valeurs possibles de $\dim(F \cap G)$?

Exercice 9 – Espace de matrices

Déterminer la dimension de l'espace des matrices **symétriques** de $M_3(\mathbb{R})$ et en donner une base.

Exercice 10 – Famille de fonctions

Montrer que $(x \mapsto 1, x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x})$ est libre dans l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11 – Coordonnées dans une base

Soit $B = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$. Vérifier que c'est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner les coordonnées de $u = (2, 3, 1)$.

Exercice 12 – Sous-espace engendré

Déterminer une équation cartésienne de $F = \text{Vect}((1, 2, 1), (2, 1, -1))$.

Exercice 13 – Réunion de deux sous-espaces

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace E .

- Dans $\mathbb{R}^2$, montrer que la réunion des deux axes n'est pas un sous-espace.
- Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
- Montrer que $F + G$ est le plus petit sous-espace contenant $F \cup G$.
- Application : dans $\mathbb{R}^3$, F est le plan $z = 0$ et G la droite dirigée par $(0, 0, 1)$. Décrire $F \cup G$ et $F + G$.

Exercice 14 – Espace des suites de Fibonacci

Soit S l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout n .

- Montrer que S est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites.
- Montrer que l'application $u \mapsto (u_0, u_1)$ est une bijection linéaire de S sur $\mathbb{R}^2$. En déduire $\dim S$.
- Vérifier que les suites géométriques (φ^n) et (ψ^n) , avec φ, ψ racines de $x^2 = x + 1$, sont dans S et forment une base.
- En déduire la formule de Binet pour F_n ($F_0 = 0, F_1 = 1$).

Exercice 15 – Synthèse : intersection et somme

Dans $\mathbb{R}^4$, soient $F = \text{Vect}((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ et $G = \text{Vect}((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$. Déterminer $\dim(F \cap G)$ et $\dim(F + G)$.