

Espaces vectoriels

Licence 1 - Fiche de révision

1. Espace vectoriel

E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) : addition interne, multiplication par un scalaire, axiomes usuels.

Exemples : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, fonctions, suites.

2. Critère de sous-espace

$F \subset E$ est un sous-espace si

$$0_E \in F$$

et

$$\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda x + \mu y \in F.$$

Test express : si $0_E \notin F$, arrêter : F n'est pas un sous-espace.

3. Combinaisons linéaires

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i ; \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}.$$

C'est le plus petit sous-espace contenant les u_i .

$x \in \text{Vect}(u_i) \iff$ on peut résoudre

$$x = \sum \lambda_i u_i.$$

4. Famille libre

$(u_1, \dots, u_p)$ est libre si

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0.$$

Sinon elle est liée.

Liée $\iff$ un vecteur est combinaison des autres.

5. Famille génératrice et base

Génératrice de E :

$$E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p).$$

Base = libre + génératrice.

Dans une base $(e_1, \dots, e_n)$:

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

avec des coordonnées x_i **uniques**.

6. Dimension

Toutes les bases d'un espace de dimension finie ont le même cardinal.

$$\dim \mathbb{K}^n = n, \quad \dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1, \quad \dim \mathcal{M}_{n,p} = np.$$

Si $F \subset E$:

$$\dim F \leq \dim E.$$

Et $F \subset E$, $\dim F = \dim E \implies F = E$.

7. Cardinal d'une famille dans $\dim E = n$

Famille libre $\implies$ au plus n vecteurs.

Famille génératrice $\implies$ au moins n vecteurs.

Avec exactement n vecteurs :

$$\text{libre} \iff \text{génératrice} \iff \text{base}.$$

8. Base incomplète

Toute famille libre d'un espace de dimension finie peut être complétée en une base.

Réciproquement, d'une famille génératrice finie, on peut extraire une base.

Sommes, sommes directes et méthodes

9. Intersection et somme

$F \cap G$ est toujours un sous-espace.

$$F + G = \{f + g \mid f \in F, g \in G\}.$$

Si $F = \text{Vect}(u_i)$ et $G = \text{Vect}(v_j)$:

$$F + G = \text{Vect}(u_i, v_j).$$

10. Formule de Grassmann

En dimension finie :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Mémo : l'intersection a été comptée deux fois, donc on la soustrait une fois.

11. Somme directe

$$F + G \text{ directe} \iff F \cap G = \{0\}.$$

Notation : $F \oplus G$.

Alors chaque $x \in F + G$ s'écrit **de façon unique**

$$x = f + g.$$

Et

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G.$$

12. Sous-espaces supplémentaires

F et G sont supplémentaires dans E si

$$E = F \oplus G.$$

Méthode pratique en dimension finie :

$$F \cap G = \{0\} \quad \text{et} \quad \dim F + \dim G = \dim E.$$

13. Trouver une base d'un sous-espace

Si F est défini par équations :

1. paramétrer les solutions ;
2. écrire $x \in F$ comme combinaison de vecteurs fixes ;
3. vérifier que ces vecteurs sont libres ;
4. conclure : ils forment une base.

14. Tester une famille

Liberté : résoudre

$$\sum \lambda_i u_i = 0.$$

Unique solution nulle $\Rightarrow$ libre.

Génération : pour x arbitraire, résoudre

$$x = \sum \lambda_i u_i.$$

Possible pour tout $x \Rightarrow$ génératrice.

15. Pièges à éviter

- $F \cup G$ n'est en général pas un sous-espace.
- Une famille contenant 0 est liée.
- Libre $\neq$ génératrice.
- $F + G$ n'est pas forcément directe.
- $x + y = 1$ définit un affine, pas un sous-espace vectoriel.

16. Exemple express dans $\mathbb{R}^3$

$$F = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}.$$

Avec $x = s, y = t, z = -s - t$:

$$F = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1)).$$

Les deux générateurs sont non colinéaires :

$$\dim F = 2.$$

17. Réflexes d'examen

- Commencer par la nature de l'objet : sous-espace ? famille ? somme ?
- Utiliser les dimensions dès qu'elles sont connues.
- Dans un espace de dimension n , compter les vecteurs avant de calculer.
- Pour une somme directe, chercher d'abord $F \cap G$.