

Espaces vectoriels

Licence 1 (L1) - Cours complet

Sous-espaces, familles libres et génératrices, bases, dimension et somme directe

Idée directrice. Un espace vectoriel permet de traiter avec le même langage des objets très différents : vecteurs de $\mathbb{R}^n$, polynômes, matrices, suites ou fonctions. L'enjeu n'est plus seulement de calculer, mais d'identifier une structure : quelles combinaisons linéaires sont possibles, quelles familles engendrent l'espace, lesquelles sont libres, et comment mesurer sa dimension.

1. Espace vectoriel : la structure abstraite

Définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps, en L1 le plus souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un **$\mathbb{K}$ -espace vectoriel** E est un ensemble muni :

— d'une addition $(x, y) \mapsto x + y$;

— d'une multiplication externe $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$,

qui vérifient les règles usuelles d'associativité, commutativité de l'addition, existence de 0_E et de l'opposé, ainsi que

$$\begin{aligned}\lambda(x + y) &= \lambda x + \lambda y, & (\lambda + \mu)x &= \lambda x + \mu x, \\ (\lambda\mu)x &= \lambda(\mu x), & 1x &= x.\end{aligned}$$

On en déduit notamment

$$0x = 0_E, \quad \lambda 0_E = 0_E, \quad (-1)x = -x.$$

Exemple

Sont des espaces vectoriels :

- $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}^n$ sur $\mathbb{C}$;
- $\mathbb{K}[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$;
- $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n\}$;
- $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions $I \rightarrow \mathbb{R}$;
- l'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$;
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices $n \times p$.

2. Sous-espaces vectoriels

Définition

Une partie $F \subset E$ est un **sous-espace vectoriel** de E si F , muni des opérations induites par E , est lui-même un espace vectoriel.

Le critère suivant évite de révérifier tous les axiomes.

Critère de reconnaissance

Une partie $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si

$$F \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda x + \mu y \in F.$$

Équivalent : $0_E \in F$ et F est stable par addition et multiplication par un scalaire.

Piège classique

Le test le plus rapide est souvent de vérifier si 0_E appartient à la partie. Si $0_E \notin F$, alors F n'est immédiatement pas un sous-espace vectoriel.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$,

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel : l'équation est linéaire et homogène. En revanche,

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 1\}$$

ne l'est pas car $(0, 0, 0) \notin G$.

Intersection

Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-espaces de E , alors

$$\bigcap_{i \in I} F_i$$

est encore un sous-espace vectoriel de E .

3. Combinaisons linéaires et sous-espace engendré**Définition**

Soient $u_1, \dots, u_p \in E$. Une **combinaison linéaire** de ces vecteurs est tout vecteur de la forme

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}.$$

Le **sous-espace engendré** par $u_1, \dots, u_p$ est

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i ; \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}.$$

$\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant tous les u_i .

Montrer qu'un vecteur appartient à un espace engendré

Pour montrer que $x \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$, on cherche des scalaires λ_i tels que

$$x = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p.$$

Dans $\mathbb{R}^n$, cela revient à résoudre un système linéaire.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, soit

$$u_1 = (1, 0, 1), \quad u_2 = (0, 1, 1).$$

Alors

$$\text{Vect}(u_1, u_2) = \{(a, b, a+b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + y\}.$$

On peut donc passer d'une description paramétrique à une équation cartésienne.

4. Familles libres et familles liées**Définition**

Une famille $(u_1, \dots, u_p)$ est **libre** si

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0_E \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0.$$

Sinon elle est **liée**.

Autrement dit, dans une famille libre, le vecteur nul ne possède que la combinaison linéaire triviale.

Théorème

Une famille $(u_1, \dots, u_p)$ est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Conséquences immédiates :

- toute famille contenant 0_E est liée ;
- toute sous-famille d'une famille libre est libre ;
- toute sur-famille d'une famille liée est liée.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$,

$$u_1 = (1, 0, 1), \quad u_2 = (0, 1, 1), \quad u_3 = (1, 1, 2).$$

Comme $u_3 = u_1 + u_2$, la famille (u_1, u_2, u_3) est liée.

Tester la liberté dans $\mathbb{R}^n$

On écrit

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0$$

et on résout le système en $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. La famille est libre exactement lorsque l'unique solution est la solution nulle.

5. Familles génératrices et bases**Définition**

Une famille $(u_1, \dots, u_p)$ est **génératrice de E** si

$$E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p).$$

Une **base** de E est une famille à la fois libre et génératrice.

Dans une base, tout vecteur s'écrit d'une manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de base.

Coordonnées dans une base

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors

$$\forall x \in E, \quad \exists! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Le n -uplet $(x_1, \dots, x_n)$ est le système de coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.

Exemple

La famille canonique

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

est une base de $\mathbb{K}^n$. La famille

$$(1, X, X^2, \dots, X^n)$$

est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

6. Dimension finie**Définition**

Un espace vectoriel E est de **dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie. Toutes ses bases ont alors le même nombre d'éléments ; ce nombre est la **dimension** de E , notée $\dim E$.

Exemples :

$$\dim \mathbb{K}^n = n, \quad \dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1, \quad \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np.$$

Comparaison des tailles

Si E est de dimension n :

- toute famille libre de E contient au plus n vecteurs ;
- toute famille génératrice de E contient au moins n vecteurs ;
- toute famille libre de n vecteurs est une base ;
- toute famille génératrice de n vecteurs est une base.

Théorème de la base incomplète

Toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complétée en une base.

Une forme équivalente utile est le théorème d'extraction : de toute famille génératrice finie, on peut extraire une base.

Construire une base à partir d'une famille génératrice

On retire successivement les vecteurs qui sont combinaisons linéaires des précédents. Le sous-espace engendré ne change pas, et l'on finit avec une famille libre qui engendre le même espace.

7. Dimension d'un sous-espace**Théorème**

Si E est de dimension finie et F est un sous-espace de E , alors

$$\dim F \leq \dim E.$$

De plus,

$$F \subset E \text{ et } \dim F = \dim E \implies F = E.$$

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, le plan vectoriel

$$F = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$$

est de dimension 2. Par exemple

$$F = \text{Vect}((1, -1, 0), (1, 0, -1)),$$

et ces deux vecteurs sont libres.

Trouver une base d'un sous-espace défini par équations

1. Résoudre les équations pour paramétrer les vecteurs de F .
2. Écrire tout vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs fixes.
3. Vérifier que les vecteurs obtenus sont libres.
4. Conclure qu'ils forment une base de F .

8. Somme de sous-espaces**Définition**

Si F et G sont deux sous-espaces de E , leur **somme** est

$$F + G = \{x + y \mid x \in F, y \in G\}.$$

C'est le plus petit sous-espace de E contenant $F \cup G$.

Si $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ et $G = \text{Vect}(v_1, \dots, v_q)$, alors

$$F + G = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q).$$

Formule de Grassmann

Si F et G sont de dimension finie,

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Cette formule traduit exactement le fait que les directions communes à F et G seraient comptées deux fois si l'on additionnait simplement $\dim F$ et $\dim G$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, deux plans vectoriels distincts de dimension 2 ont en général une intersection de dimension 1. On obtient alors

$$\dim(F + G) = 2 + 2 - 1 = 3,$$

donc $F + G = \mathbb{R}^3$.

9. Somme directe et sous-espaces supplémentaires**Définition**

La somme $F + G$ est **directe** si tout vecteur de $F + G$ admet une décomposition unique

$$x = f + g, \quad f \in F, g \in G.$$

On note alors

$$F \oplus G.$$

Critère fondamental de somme directe

Pour deux sous-espaces $F, G \subset E$,

$$F + G \text{ est directe} \iff F \cap G = \{0_E\}.$$

En dimension finie, si la somme est directe,

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G.$$

Si de plus $F + G = E$, on dit que F et G sont **supplémentaires** dans E :

$$E = F \oplus G.$$

Montrer que $E = F \oplus G$

Deux approches classiques :

1. montrer $F \cap G = \{0\}$ puis $F + G = E$;
2. en dimension finie, montrer $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, posons

$$F = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0)), \quad G = \text{Vect}((0, 0, 1)).$$

Alors $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = 2 + 1 = 3$, donc

$$\mathbb{R}^3 = F \oplus G.$$

10. Méthodes de rédaction à connaître**A. Montrer qu'une partie est un sous-espace**

Une rédaction efficace est :

1. $0_E \in F$;

2. soient $x, y \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$;
3. vérifier que $\lambda x + \mu y \in F$;
4. conclure par le critère de sous-espace vectoriel.

B. Montrer qu'une famille est une base

Deux stratégies fréquentes :

- prouver qu'elle est libre et génératrice ;
- si $\dim E = n$ et que la famille contient n vecteurs, il suffit de prouver *soit* la liberté, *soit* qu'elle est génératrice.

C. Déterminer $F \cap G$

On prend $x \in F \cap G$, puis on écrit simultanément les descriptions de x dans F et dans G . Le problème se ramène souvent à un système linéaire.

D. Déterminer $F + G$

Si l'on connaît des générateurs de F et de G , on les réunit, puis on extrait une famille libre qui engendre le même espace.

11. Exemple complet dans $\mathbb{R}^3$

Soient

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}, \quad G = \text{Vect}((1, 1, 1)).$$

1. **Une base de F .** On pose $x = s$, $y = t$, donc $z = -s - t$:

$$(x, y, z) = s(1, 0, -1) + t(0, 1, -1).$$

Ainsi

$$F = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1)).$$

Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc ils sont libres : $\dim F = 2$.

2. **Intersection.** Un vecteur de G est $\lambda(1, 1, 1)$. Il appartient à F si

$$\lambda + \lambda + \lambda = 0,$$

donc $3\lambda = 0$ et $\lambda = 0$. Ainsi

$$F \cap G = \{0\}.$$

3. **Somme.** Comme

$$\dim F + \dim G = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

et $F \cap G = \{0\}$,

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = F \oplus G.}$$

Tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ possède donc une décomposition unique en un vecteur de F et un vecteur de G .

12. Pièges classiques

Piège classique

1. **Oublier le vecteur nul.** Une partie définie par une équation non homogène, comme $x + y = 1$, n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^2$.
2. **Confondre libre et génératrice.** Une famille peut être libre sans engendrer tout l'espace, ou génératrice sans être libre.
3. **Déduire trop vite une base.** Une famille de p vecteurs dans un espace de dimension n n'est pas automatiquement une base ; il faut notamment $p = n$ et une condition supplémentaire de liberté ou de génération.
4. **Confondre $F \cup G$ et $F + G$.** En général $F \cup G$ n'est pas un sous-espace. La somme $F + G$, elle, l'est toujours.
5. **Confondre somme et somme directe.** $F + G$ est directe seulement si $F \cap G = \{0\}$.

13. Exercices corrigés courts

Exercice 1 - Sous-espace ou non ?

Dans $\mathbb{R}^3$, considérer

$$H = \{(x, y, z) \mid x - 2y + z = 0\}.$$

Comme l'équation est linéaire homogène, $0 \in H$. Si $u, v \in H$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la forme linéaire $L(x, y, z) = x - 2y + z$ vérifie

$$L(\lambda u + \mu v) = \lambda L(u) + \mu L(v) = 0.$$

Donc H est un sous-espace vectoriel.

Exercice 2 - Base d'un sous-espace

Soit

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0, z - t = 0\}.$$

On écrit $y = -x$ et $t = z$:

$$(x, y, z, t) = x(1, -1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 1).$$

Les deux vecteurs sont libres, donc

$$\boxed{((1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))}$$

est une base de F et $\dim F = 2$.

Exercice 3 - Liberté de polynômes

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, la famille

$$P_1 = 1 + X, \quad P_2 = X + X^2, \quad P_3 = 1 - X^2$$

est liée car

$$P_1 - P_2 - P_3 = 0.$$

Il existe donc une relation linéaire non triviale entre ses éléments.

14. À retenir

- Un sous-espace est une partie stable par combinaisons linéaires ; vérifier 0_E est le premier réflexe.
- $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ contient toutes les combinaisons linéaires des u_i .
- Libre = aucune relation linéaire non triviale ; génératrice = tout vecteur de l'espace s'obtient ; base = les deux.
- En dimension n , une famille de n vecteurs est une base dès qu'elle est libre ou génératrice.
- Toute famille libre peut être complétée en une base ; toute famille génératrice finie contient une base.
- $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.
- $F \oplus G \iff F \cap G = \{0\}$, et $E = F \oplus G$ signifie que chaque vecteur de E se décompose de façon unique en $f + g$.