

Plaquette 2 - Exponentielles, logarithmes et puissances

Fonctions usuelles et réciproques — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Exponentielles et logarithmes.

$$a^x = e^{x \ln a} \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$ pour $x, y > 0$.
- $(a^x)' = a^x \ln a$; $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ ($x > 0$).
- Croissances comparées : pour $\alpha, \beta > 0$, $\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} \rightarrow 0$ et $\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} \rightarrow 0$ en $+\infty$.
- Nombre de chiffres de $N \geq 1$ en base b : $\lfloor \log_b N \rfloor + 1$.
- Loi exponentielle de décroissance : $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, demi-vie $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Correction de l'exercice 1 - Logarithmes de bases différentes

On ramène tout à la même base, avec la formule de changement de base :

$$\log_4 x = \frac{\ln x}{\ln 4} = \frac{\ln x}{2 \ln 2} = \frac{1}{2} \log_2 x$$

- L'équation devient $\frac{3}{2} \log_2 x = 3$, soit $\log_2 x = 2$, donc $x = 2^2 = 4$.
- Vérification : $\log_2 4 + \log_4 4 = 2 + 1 = 3$.
- La solution est bien dans le domaine $]0; +\infty[$.

Réponse. $x = 4$.

Correction de l'exercice 2 - Une équation en 2 puissance x

On pose $t = 2^x > 0$; alors $4^x = (2^2)^x = t^2$:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t - 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ ou } t = 2$$

- Les deux valeurs sont positives, donc acceptables : $2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ et $2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.
- Solutions : $\{0; 1\}$.
- Si une valeur de t avait été négative, elle aurait été rejetée : 2^x est toujours strictement positif.

Réponse. $\{0; 1\}$.

Correction de l'exercice 3 - Une inéquation logarithmique

Domaine : il faut $x - 1 > 0$ et $x + 1 > 0$, soit $x > 1$.

- Sur ce domaine, $\ln(x - 1) + \ln(x + 1) = \ln(x^2 - 1)$, et $\ln$ est strictement croissante :

$$\ln(x^2 - 1) < \ln 3 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 3 \Leftrightarrow x^2 < 4$$

- Avec $x > 1$: $1 < x < 2$. Solution : $]1; 2[$.
- Piège : sans le domaine, on garderait à tort $] - 2; - 1[$, où les logarithmes de départ ne sont pas définis.

Réponse. $]1; 2[$.

Correction de l'exercice 4 - Deux puissances égales

$$x^y = y^x \Leftrightarrow y \ln x = x \ln y \Leftrightarrow g(x) = g(y).$$

— $g'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}$: g croît strictement sur $]0; e]$ et décroît strictement ensuite. Une égalité $g(x) = g(y)$ avec $x < y$ impose donc $x < e < y$: $x \in \{1, 2\}$.

— $x = 1$: $g(1) = 0$, et $g(y) > 0$ pour $y > 1$: impossible.

— $x = 2$: on cherche $y \geq 3$ avec $g(y) = g(2)$; il y a au plus une solution, et

$$2^4 = 16 = 4^2$$

— L'unique couple est $(2; 4)$.

Réponse. $(x, y) = (2, 4)$.

Correction de l'exercice 5 - Racine contre logarithme

Valeurs : pour $x = 100$, $\sqrt{x} = 10$ et $10 \ln x \approx 46,1$; pour $x = 10^4$, 100 et $\approx 92,1$; pour $x = 10^6$, $1\,000$ et $\approx 138,2$.

— La racine finit par l'emporter, même si le logarithme est devant au début. En effet :

$$\frac{10 \ln x}{\sqrt{x}} = 10 \frac{\ln x}{x^{1/2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

— Toute puissance positive de x , même $x^{0,01}$, finit par dépasser n'importe quel multiple de $\ln x$; mais le « point de dépassement » peut être très loin.

Réponse. $\sqrt{x}$ dépasse $10 \ln x$ entre 100 et 10^4 ; $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$.

Correction de l'exercice 6 - La datation au carbone 14

Au bout d'une demi-vie, il en reste la moitié : $N(t) = N_0 \times 2^{-t/T}$, avec $T = 5\,730$.

$$\frac{N(10\,000)}{N_0} = 2^{-10\,000/5\,730} \approx 0,298$$

— Il reste environ 30 % du carbone 14.

— $2^{-t/T} = 0,1 \Leftrightarrow \frac{t}{T} = \log_2 10 \approx 3,32$, soit $t \approx 19\,000$ ans.

— Écriture équivalente : $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ avec $\lambda = \frac{\ln 2}{T} \approx 1,21 \times 10^{-4}$ par an.

Réponse. Environ 30 % ; 10 % au bout d'environ 19 000 ans.

Correction de l'exercice 7 - Intérêts composés

— Intérêts annuels : $1,03^{10} \approx 1,3439$.

— Intérêts continus :

$$e^{0,03 \times 10} = e^{0,3} \approx 1,3499$$

— La capitalisation continue rapporte légèrement plus, car $(1 + \frac{r}{n})^n \rightarrow e^r$ en croissant quand on fractionne de plus en plus finement.

— Sur 10 000 €, l'écart est d'environ 60 €.

Réponse. 1,3439 contre 1,3499.

Correction de l'exercice 8 - Le pH

— $\text{pH} = -\log_{10}(3,2 \times 10^{-5}) = -(\log_{10} 3,2 - 5) \approx 5 - 0,505 = 4,49$.

— Si le pH diminue de 1 :

$$-\log_{10} [H^+] = -\log_{10} [H^+] - 1 \Leftrightarrow [H^+] = 10 [H^+]$$

- La concentration est multipliée par 10 : une solution de pH 3 est 10 fois plus acide qu'une solution de pH 4.
- L'échelle logarithmique transforme les multiplications en additions.

Réponse. pH $\approx 4,49$; concentration multipliée par 10.

Correction de l'exercice 9 - Le nombre de bits

Un entier $N \geq 1$ a $\lfloor \log_b N \rfloor + 1$ chiffres en base b .

— $\log_2 1\,000 = \frac{\ln 1\,000}{\ln 2} \approx 9,97$: 1 000 s'écrit avec 10 bits (en effet

$$2^9 = 512 \leq 1\,000 < 1\,024 = 2^{10}).$$

— $\log_{10}(2^{64}) = 64 \log_{10} 2 \approx 19,27$:

$$\lfloor 19,27 \rfloor + 1 = 20 \text{ chiffres}$$

— ($2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$, le nombre de valeurs d'un entier sur 64 bits.)

Réponse. 10 bits ; 20 chiffres.

Correction de l'exercice 10 - Caractériser l'exponentielle

On pose $g(x) = f(x)e^{-kx}$, dérivable, et on calcule :

$$g'(x) = f'(x)e^{-kx} - kf(x)e^{-kx} = (f'(x) - kf(x))e^{-kx} = 0$$

- g est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, égale à $g(0) = f(0) = 1$.
- Donc $f(x) = e^{kx}$ pour tout x .
- Application : une population dont le taux de croissance est proportionnel à sa taille suit une loi exponentielle.

Réponse. $g = fe^{-kx}$ a une dérivée nulle.

Correction de l'exercice 11 - Une suite croissante vers e

On dérive le produit :

$$h'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \times \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

- Avec $u = \frac{1}{x}$: $\frac{u}{1+u} = \frac{1}{x+1}$, donc $h'(x) > 0$ par l'inégalité admise.
- h est croissante, donc $\exp \circ h$ aussi : $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ croît, en particulier sur les entiers.
- Valeurs : $n = 1, 2, 10, 100$ donnent 2 ; 2,25 ; 2,594 ; 2,705, qui croissent vers $e \approx 2,718$.

Réponse. $h'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} > 0$.

Correction de l'exercice 12 - Exponentielle contre puissance

On passe au logarithme du quotient :

$$\ln \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^{10}} = \sqrt{x} - 10 \ln x = \sqrt{x} \left(1 - 10 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$$

— Comme $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$, la parenthèse tend vers 1 et le logarithme tend vers $+\infty$.

- Donc $\frac{e^{\sqrt{x}}}{x^{10}} \rightarrow +\infty$: même $e^{\sqrt{x}}$, qui croît moins vite que e^x , bat toute puissance.
- Méthode : comparer les logarithmes transforme une comparaison de produits en comparaison de sommes.

Réponse. $+\infty$.

Correction de l'exercice 13 - Dériver des puissances variables

On revient à l'exponentielle.

- $f(x) = e^{x \ln 2}$, donc $f'(x) = \ln 2 \times 2^x$.
- $g(x) = e^{\sqrt{2} \ln x}$, donc $g'(x) = \frac{\sqrt{2}}{x} x^{\sqrt{2}} = \sqrt{2} x^{\sqrt{2}-1}$ (même règle que pour les puissances entières).
- $h(x) = e^{x \ln(\ln x)}$, donc

$$h'(x) = \left(\ln(\ln x) + x \times \frac{1}{x \ln x} \right) (\ln x)^x = \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right) (\ln x)^x$$

Réponse. $2^x \ln 2$; $\sqrt{2} x^{\sqrt{2}-1}$; $(\ln \ln x + \frac{1}{\ln x})(\ln x)^x$.

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

- Faux** : $\ln(1+1) = \ln 2 \neq 0 = \ln 1 + \ln 1$. C'est $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
- Vrai** : $e^{(x+y) \ln a} = e^{x \ln a} e^{y \ln a}$.
- Vrai** :

$$(a^x)^y = e^{y \ln(a^x)} = e^{yx \ln a} = a^{xy}$$

- Faux** : $2^{3^2} = 2^9 = 512$ alors que $(2^3)^2 = 64$. Par convention, a^{x^y} se lit $a^{(x^y)}$.

Réponse. a) faux · b) vrai · c) vrai · d) faux.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : 2 puissance $x = x^2$

- Solutions évidentes : $2^2 = 4 = 2^2$ et $2^4 = 16 = 4^2$: $x = 2$ et $x = 4$.
- Pour $x > 0$: $2^x = x^2 \Leftrightarrow x \ln 2 = 2 \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{2}$. D'après l'étude de $\frac{\ln x}{x}$, cette valeur, atteinte en $2 < e$, est prise exactement deux fois : $x = 2$ et $x = 4$.
- Pour $x < 0$: $\varphi(x) = 2^x - x^2$ est strictement croissante sur $] -\infty ; 0]$ (somme de deux fonctions croissantes), avec $\varphi(-1) = -\frac{1}{2}$ et $\varphi(0) = 1$:

$$\exists ! \alpha \in] -1 ; 0[, 2^\alpha = \alpha^2$$

- Il y a **trois** solutions : $\alpha \approx -0,767$, 2 et 4.

Réponse. Trois solutions : $\alpha \approx -0,767$, 2, 4.