

Plaquette 4 - Fonctions hyperboliques : formules et équations

Fonctions usuelles et réciproques — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Fonctions hyperboliques.

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$$

$$- \operatorname{ch}' = \operatorname{sh}, \operatorname{sh}' = \operatorname{ch}, \operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2}.$$

$$- \text{Addition : } \operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \text{ et } \operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b.$$

$$- \text{Duplication : } \operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \text{ et } \operatorname{ch}(2x) = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 x.$$

$$- \operatorname{ch} \text{ est paire, } \geq 1 ; \operatorname{sh} \text{ et } \operatorname{th} \text{ sont impaires ; } \operatorname{th} \text{ est à valeurs dans }]-1; 1[.$$

Correction de l'exercice 1 - Premières propriétés

$$- \text{Par l'inégalité } t + \frac{1}{t} \geq 2 \text{ pour } t > 0, \text{ avec } t = e^x :$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2} \left(e^x + \frac{1}{e^x} \right) \geq 1$$

$$- \text{avec égalité si et seulement si } x = 0.$$

$$- \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x} > 0, \text{ donc } \operatorname{sh} x < \operatorname{ch} x.$$

$$- \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = \frac{2e^x}{2} = e^x : \text{les deux fonctions sont les parties paire et impaire de l'exponentielle.}$$

Réponse. $\operatorname{ch} = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \geq 1 ; \operatorname{ch} - \operatorname{sh} = e^{-x} > 0.$

Correction de l'exercice 2 - Formule d'addition

On développe le membre de droite avec les exponentielles :

$$\frac{(e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b}) + (e^a - e^{-a})(e^b - e^{-b})}{4}$$

$$- \text{Les termes croisés } e^{a-b} \text{ et } e^{-a+b} \text{ s'annulent ; il reste } \frac{2e^{a+b} + 2e^{-a-b}}{4} = \operatorname{ch}(a+b).$$

$$- \text{Avec } a = b = x : \operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 \text{ (car } \operatorname{sh}^2 = \operatorname{ch}^2 - 1).$$

$$- \text{Comparaison : } \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b ; \text{ seul le signe change.}$$

Réponse. Développement exponentiel ; $\operatorname{ch}(2x) = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1.$

Correction de l'exercice 3 - Résoudre $\operatorname{ch} x = 2$

$$\text{On pose } t = e^x > 0 : \frac{t + \frac{1}{t}}{2} = 2 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 = 0.$$

$$t = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$- \text{Les deux racines sont positives } (2 - \sqrt{3} \approx 0,27) : x = \ln(2 + \sqrt{3}) \text{ ou } x = \ln(2 - \sqrt{3}).$$

$$- \text{Comme } (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1, \text{ la seconde vaut } -\ln(2 + \sqrt{3}) : \text{les solutions sont } \pm \ln(2 + \sqrt{3}) \approx \pm 1,317, \text{ symétriques, ce qui est cohérent avec la parité de } \operatorname{ch}.$$

Réponse. $x = \pm \ln(2 + \sqrt{3}).$

Correction de l'exercice 4 - Une équation mixte

On remplace par les exponentielles :

$$\frac{3(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})}{2} = 3 \Leftrightarrow e^x + 2e^{-x} = 3$$

— Avec $t = e^x > 0$: $t + \frac{2}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ ou $t = 2$.

— Donc $x = 0$ ou $x = \ln 2$.

— Vérification pour $x = \ln 2$: $\text{ch} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$, $\text{sh} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$, et $3 \times \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = 3$.

Réponse. $x \in \{0; \ln 2\}$.

Correction de l'exercice 5 - La tangente hyperbolique et sa réciproque

— $\text{th}' = \frac{1}{\text{ch}^2} > 0$: strictement croissante ; $\text{th} x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \rightarrow \pm 1$ en $\pm \infty$. Par continuité, bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1; 1[$.

— Soit $y \in] -1; 1[$; on résout $\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = y$:

$$e^{2x}(1 - y) = 1 + y \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + y}{1 - y}$$

— $(\frac{1+y}{1-y} > 0$ pour $|y| < 1$.) Contrôle : $\text{argth} 0 = 0$.

Réponse. $\text{argth}(y) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + y}{1 - y}$.

Correction de l'exercice 6 - Dérivée de la tangente hyperbolique

— Quotient : $\text{th}' = \frac{\text{ch}^2 - \text{sh}^2}{\text{ch}^4} = \frac{1}{\text{ch}^2} = 1 - \text{th}^2$.

— Réciproque : pour $y = \text{th} x$,

$$\text{argth}'(y) = \frac{1}{\text{th}'(x)} = \frac{1}{1 - \text{th}^2 x} = \frac{1}{1 - y^2}$$

— Avec la formule explicite : $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y} \right) = \frac{1}{1-y^2}$.

— Les deux méthodes concordent.

Réponse. $\text{argth}'(y) = \frac{1}{1 - y^2}$.

Correction de l'exercice 7 - Linéariser sh au cube

On développe avec la formule du binôme :

$$\text{sh}^3 x = \frac{(e^x - e^{-x})^3}{8} = \frac{e^{3x} - 3e^x + 3e^{-x} - e^{-3x}}{8}$$

— On regroupe : $\frac{(e^{3x} - e^{-3x}) - 3(e^x - e^{-x})}{8} = \frac{2\text{sh}(3x) - 6\text{sh} x}{8}$.

— D'où la formule. Comparaison : $\sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin(3x)}{4}$; les signes diffèrent.

— La linéarisation sert à calculer des primitives : $\int \text{sh}^3 x \, dx = \frac{\text{ch}(3x)}{12} - \frac{3}{4} \text{ch} x$.

Réponse. Binôme puis regroupement.

Correction de l'exercice 8 - La chaînette

- $y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}$, nul seulement en 0 ; y décroît puis croît : le point le plus bas est $(0; a)$.
- Pente en $x = a$: $\operatorname{sh} 1 \approx 1,175$.
- On compare avec l'inégalité $\operatorname{ch} u \geq 1 + \frac{u^2}{2}$ (exercice suivant), avec $u = \frac{x}{a}$:

$$a \operatorname{ch} \frac{x}{a} \geq a + \frac{x^2}{2a}$$

- La chaînette est au-dessus de la parabole, qui l'approche bien près du point bas. (Galilée croyait qu'un câble prend une forme parabolique.)

Réponse. Point bas $(0; a)$; pente $\operatorname{sh} 1$; au-dessus de la parabole.

Correction de l'exercice 9 - Minorer le cosinus hyperbolique

Soit $g(x) = \operatorname{ch} x - 1 - \frac{x^2}{2}$, paire. On dérive deux fois :

$$g'(x) = \operatorname{sh} x - x \quad g''(x) = \operatorname{ch} x - 1 \geq 0$$

- g' est croissante et $g'(0) = 0$: $g' \leq 0$ sur $\mathbb{R}_-$ et $g' \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Donc g atteint son minimum en 0, où $g(0) = 0$.
- D'où $\operatorname{ch} x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$; à comparer avec $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

Réponse. $g'' = \operatorname{ch} - 1 \geq 0$, minimum $g(0) = 0$.

Correction de l'exercice 10 - Paramétrer une hyperbole

- $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$: $M(t)$ est sur l'hyperbole. Comme $\operatorname{ch} t \geq 1 > 0$, c'est la branche $x > 0$.
- Réciproquement, si $x^2 - y^2 = 1$ avec $x > 0$, alors $x = \sqrt{1 + y^2}$; en posant $t = \operatorname{argsh} y$, on a

$$\operatorname{sh} t = y \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} t = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} = x$$

- Chaque point est atteint pour un unique t (sh est bijective) : c'est un paramétrage de la branche, comme $(\cos t, \sin t)$ paramètre le cercle.

Réponse. Branche $x > 0$ de $x^2 - y^2 = 1$, parcourue une fois.

Correction de l'exercice 11 - Limite de la tangente hyperbolique

En multipliant numérateur et dénominateur par e^x :

$$\operatorname{th} x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{(e^{2x} + 1) - 2}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$$

- Donc $\operatorname{th} x \rightarrow 1$ en $+\infty$, et $1 - \operatorname{th} x \approx 2e^{-2x}$.
- L'approche est exponentielle : $\operatorname{th} 5 \approx 0,999\,909$. À comparer avec $\arctan$, qui approche $\frac{\pi}{2}$ en $\frac{1}{x}$ seulement.

Réponse. Limite 1, écart $\approx 2e^{-2x}$.

Correction de l'exercice 12 - Dérivées successives

- $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$, $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$: les dérivées alternent avec une période 2.

$$\operatorname{ch}^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{ch} & n \text{ pair} \\ \operatorname{sh} & n \text{ impair} \end{cases}$$

- et l'inverse pour sh .

- Pour $f = A\text{ch} + B\text{sh}$: $f' = f$ toujours. $f(0) = A = 2$ et $f'(0) = B = -1$: $f = 2\text{ch} - \text{sh}$.
- Écriture exponentielle : $f(x) = \frac{e^x + 3e^{-x}}{2}$.

Réponse. Alternance ch/sh ; $f = 2\text{ch} - \text{sh}$.

Correction de l'exercice 13 - Addition des tangentes hyperboliques

Avec les formules d'addition, puis division par $\text{ch} a \text{ch} b$:

$$\text{th}(a + b) = \frac{\text{sh} a \text{ch} b + \text{ch} a \text{sh} b}{\text{ch} a \text{ch} b + \text{sh} a \text{sh} b} = \frac{\text{th} a + \text{th} b}{1 + \text{th} a \text{th} b}$$

- Avec 0,6 et 0,6 : $\frac{1,2}{1,36} \approx 0,882$, et non 1,2.
- En relativité, les vitesses (en fraction de la vitesse de la lumière) se composent ainsi : on ne dépasse jamais 1.

Réponse. Formule d'addition ; $\approx 0,882$.

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

- Faux** : ch est paire, donc non injective sur $\mathbb{R}$ ($\text{ch}(-1) = \text{ch}(1)$). Elle est bijective de $[0; +\infty[$ sur $[1; +\infty[$.
- Vrai** : formule d'addition de sh avec $a = b = x$.
- Faux** : c'est $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$; et $\text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x = \text{ch}(2x)$.
- Vrai** : $\frac{\text{ch} x}{e^{x/2}} = 1 + e^{-2x} \rightarrow 1$, de même pour sh.

$$\text{ch} x \underset{+\infty}{\sim} \text{sh} x \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$$

Réponse. a) faux · b) vrai · c) faux · d) vrai.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : le gudermannien

- $g'(x) = \frac{2e^x}{1 + e^{2x}} = \frac{2}{e^{-x} + e^x} = \frac{1}{\text{ch} x} > 0$. g est strictement croissante, de limites $2 \times 0 - \frac{\pi}{2}$ et $2 \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$: bijection sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
- Avec $\theta = \arctan e^x$: $\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 2\theta$ et

$$\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} = -\text{th} x$$

- Donc $\sin g(x) = \text{th} x$. Cette fonction relie trigonométrie circulaire et hyperbolique (elle apparaît dans la projection de Mercator).

Réponse. a) $g' = \frac{1}{\text{ch}}$ · b) $\sin g(x) = \text{th} x$.