

**Plaquette 1 - Logarithme, exponentielle,
fonctions circulaires réciproques et hyperboliques**
Fonctions usuelles et réciproques — Licence 1 (L1)
 Corrections détaillées

Boîte à outils

Logarithme et exponentielle.

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad e^{a+b} = e^a e^b \quad a^b = e^{b \ln a} \quad (a > 0)$$

- $\ln$ est une bijection croissante de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\frac{1}{x}$; $\exp$ est sa réciproque.
- **Croissances comparées** : $\ln x \ll x^\alpha \ll e^x$ en $+\infty$.

Fonctions circulaires réciproques.

Fonction	Domaine	Image	Dérivée
$\arcsin$	$[-1; 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos$	$[-1; 1]$	$[0; \pi]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan$	$\mathbb{R}$	$\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$	$\frac{1}{1+x^2}$

- $\sin(\arcsin x) = x$ pour $x \in [-1; 1]$, mais $\arcsin(\sin \theta) = \theta$ **seulement** si $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
- $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$; $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ pour $x > 0$.

Fonctions hyperboliques.

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

- **Identité fondamentale** : $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.
- $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$, $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$, $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2}$.
- ch est **paire**, sh et th sont **impaires** ; th est bornée par 1.

Correction de l'exercice 1 - Équation avec logarithmes

- **Domaine** : il faut $x+2 > 0$ **et** $x-1 > 0$, donc $x > 1$.
- **Regroupement** : $\ln[(x+2)(x-1)] = \ln 4$.
- $\ln$ étant **injective** : $(x+2)(x-1) = 4$, soit $x^2 + x - 2 = 4$, donc $x^2 + x - 6 = 0$.
- **Racines** : $\Delta = 1 + 24 = 25$, donc $x = \frac{-1 \pm 5}{2}$, soit $x = 2$ ou $x = -3$.
- **Filtrage par le domaine** : $-3 \leq 1$ est **rejetée**, seule $x = 2$ convient.
- **Vérification** : $\ln 4 + \ln 1 = \ln 4$ ✓
- **Erreur classique** : oublier le domaine et garder -3 . Toujours le déterminer **avant** de résoudre.

Réponse. $x = 2$.

Correction de l'exercice 2 - Équation exponentielle

- **Changement de variable** : on pose $X = e^x > 0$. L'équation devient $X^2 - 5X + 6 = 0$.
- **Racines** : $X = 2$ ou $X = 3$ (somme 5, produit 6) — les deux sont **positives**, donc admissibles.
- **Retour** : $e^x = 2$ donne $x = \ln 2 \approx 0,693$; $e^x = 3$ donne $x = \ln 3 \approx 1,099$.
- **Vérification** pour $x = \ln 2$: $e^{2\ln 2} = 4$, et $4 - 10 + 6 = 0$ ✓
- **Point de vigilance** : si une racine en X était **négative ou nulle**, elle serait à rejeter — l'exponentielle est toujours strictement positive.
- **Méthode** : reconnaître $e^{2x} = (e^x)^2$ pour se ramener à un trinôme.

Réponse. $x = \ln 2$ ou $x = \ln 3$.

Correction de l'exercice 3 - Arcsinus et arccosinus

- $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$: c'est l'unique angle de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ de sinus $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$: l'unique angle de $[0; \pi]$ de cosinus $-\frac{1}{2}$.
- **Troisième calcul — attention au piège** : $\frac{5\pi}{6} \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, donc le résultat **n'est pas** $\frac{5\pi}{6}$.
- On calcule d'abord $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, puis $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

$$\arcsin\left(\sin \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$
- **Contrôle** : $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$ sont supplémentaires, donc de **même sinus** ✓
- **Règle** : $\arcsin(\sin \theta) = \theta$ **uniquement** sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; sinon il faut ramener l'angle dans cet intervalle.

Réponse. $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{6}$.

Correction de l'exercice 4 - Relation entre arcsin et arccos

Méthode par dérivation. Soit $g(x) = \arcsin x + \arccos x$ sur $] -1 ; 1[$.

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

- g est donc **constante** sur cet intervalle.
- **Valeur de la constante** : $g(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.
- **Aux bornes** : $g(1) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$ ✓ et $g(-1) = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$ ✓
- **Conclusion** : l'identité vaut sur tout $[-1; 1]$.
- **Méthode alternative** : poser $\theta = \arcsin x$, donc $x = \sin \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ avec $\frac{\pi}{2} - \theta \in [0; \pi]$, d'où $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \theta$.
- **Contrôle** : $x = \frac{1}{2}$ donne $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ ✓

Réponse. Dérivée nulle, valeur $\frac{\pi}{2}$ en $x = 0$.

Correction de l'exercice 5 - Arctangente

On utilise $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.

— **Somme des deux derniers** : avec $\tan a = 2$ et $\tan b = 3$,

$$\tan(a+b) = \frac{2+3}{1-6} = \frac{5}{-5} = -1$$

— Comme $a, b > \frac{\pi}{4}$, on a $a+b \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$, donc $a+b = \frac{3\pi}{4}$.

— **Total** : $\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi$.

— **Vérification numérique** : $0,7854 + 1,1071 + 1,2490 \approx 3,1416 = \pi \checkmark$

— **Point délicat** : la formule de la tangente donne l'angle **modulo** π ; il faut ensuite le localiser par un encadrement.

— **Interprétation** : ces trois angles sont ceux des triangles rectangles de pentes 1, 2, 3 — leur somme fait exactement un angle plat, résultat classique et élégant.

Réponse. La somme vaut π .

Correction de l'exercice 6 - Dérivée d'une composée avec arctan

— **Dérivée de l'argument** : avec $u = \frac{1-x}{1+x}$,

$$u' = \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}$$

— **Calcul de $1+u^2$** :

$$1 + \frac{(1-x)^2}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2 + (1-x)^2}{(1+x)^2} = \frac{2+2x^2}{(1+x)^2}$$

— **Dérivée de f** :

$$f'(x) = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{-2}{(1+x)^2} \times \frac{(1+x)^2}{2(1+x^2)} = \frac{-1}{1+x^2}$$

— Donc $f'(x) = -\arctan'(x)$: la fonction $f(x) + \arctan x$ est **constante**.

— **Valeur en 0** : $f(0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, donc la constante est $\frac{\pi}{4}$.

— **Conclusion** : $f(x) = \frac{\pi}{4} - \arctan x$ sur $] -1; +\infty[$.

— **Contrôle** en $x = 1$: $f(1) = \arctan 0 = 0$, et $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0 \checkmark$

Réponse. $f(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ et $f(x) = \frac{\pi}{4} - \arctan x$.

Correction de l'exercice 7 - Identité hyperbolique

— **Identité fondamentale** : en développant,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{4e^x e^{-x}}{4} = 1$$

— **Duplication** : $\operatorname{ch}(2x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$. Or $\operatorname{ch}^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}$, donc

$$\operatorname{ch}(2x) = 2\operatorname{ch}^2 x - 1$$

— **Contrôle** en $x = 0$: $\operatorname{ch} 0 = 1$, et $2 - 1 = 1 \checkmark$; en $x = 1$: $\operatorname{ch} 2 \approx 3,7622$ et $2 \times 1,5431^2 - 1 \approx 3,7622 \checkmark$

- **Analogie trigonométrique** : les formules hyperboliques s'obtiennent depuis les circulaires en changeant le signe devant sh^2 (règle d'Osborn).
- **Application géométrique** : $(\text{ch } t, \text{sh } t)$ paramètre l'**hyperbole** $x^2 - y^2 = 1$, comme $(\cos t, \sin t)$ paramètre le cercle.

Réponse. $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$ et $\text{ch } 2x = 2\text{ch}^2 x - 1$.

Correction de l'exercice 8 - Réciproque hyperbolique

- **Bijektivité** : $\text{sh}' = \text{ch} > 0$, donc sh est **strictement croissante** ; ses limites en $\mp\infty$ sont $\mp\infty$ ✓
- **Résolution** : on résout $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. En posant $X = e^x > 0$:

$$2y = X - \frac{1}{X} \implies X^2 - 2yX - 1 = 0$$

- **Discriminant** : $4y^2 + 4 > 0$, racines $X = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$.
- Seule la racine **positive** convient : $X = y + \sqrt{y^2 + 1}$ (l'autre est négative car $\sqrt{y^2 + 1} > |y|$).
- **Réciproque** :

$$\text{argsh}(y) = \ln \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right)$$

- **Contrôle** : $\text{argsh}(0) = \ln 1 = 0$ ✓ ; $\text{sh}(1) \approx 1,1752$ et $\ln(1,1752 + \sqrt{2,3811}) = \ln(2,7183) = 1$ ✓
- **Dérivée** : $\text{argsh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ — utile pour les primitives.

Réponse. $\text{argsh}(y) = \ln \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right)$.

Correction de l'exercice 9 - Puissances et logarithmes

- **Passage au logarithme** (licite, les deux membres sont positifs) :

$$\sqrt{x} \ln x = x \ln \sqrt{x} = \frac{x}{2} \ln x$$

- **Factorisation** : $\ln x \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2} \right) = 0$.
- **Premier cas** : $\ln x = 0$, donc $x = 1$.
- **Second cas** : $\sqrt{x} = \frac{x}{2}$, soit $2\sqrt{x} = x$. En posant $t = \sqrt{x} > 0$: $2t = t^2$, donc $t = 2$ et $x = 4$.
- **Solutions** : $x = 1$ et $x = 4$.
- **Vérifications** : $1^1 = 1 = 1^1$ ✓ ; $4^2 = 16$ et $2^4 = 16$ ✓
- **Méthode** : pour une équation où l'inconnue est **en exposant et en base**, le logarithme linéarise tout.

Réponse. $x = 1$ et $x = 4$.

Correction de l'exercice 10 - Étude de la tangente hyperbolique

- **Parité** : $\text{th}(-x) = \frac{\text{sh}(-x)}{\text{ch}(-x)} = -\text{th } x$ — fonction **impaire**.
- **Dérivée** : $\text{th}'x = \frac{\text{ch}^2 - \text{sh}^2}{\text{ch}^2} = \frac{1}{\text{ch}^2 x} > 0$: **strictement croissante**.

- **Limites** : en écrivant $\operatorname{th} x = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$, on voit que $\operatorname{th} x \rightarrow 1$ en $+\infty$, et $\rightarrow -1$ en $-\infty$ par imparité.
- **Allure** : courbe en « S » passant par l'origine, avec **asymptotes horizontales** $y = \pm 1$.
- **Tangente en 0** : $\operatorname{th}'(0) = 1$, donc $y = x$ — et $\operatorname{th} x \sim x$ en 0.
- **Valeurs** : $\operatorname{th} 1 \approx 0,7616$, $\operatorname{th} 2 \approx 0,9640$, $\operatorname{th} 3 \approx 0,9951$ — saturation rapide.
- **Applications** : fonction d'activation en apprentissage automatique, et vitesse limite en chute avec frottement quadratique.

Réponse. Impaire, strictement croissante de -1 à 1 , $\operatorname{th} x \sim x$ en 0.

Correction de l'exercice 11 - Inégalité logarithmique

Soit $g(x) = x - 1 - \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

- **Dérivée** : $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.
- **Signe** : négative sur $]0; 1[$, positive sur $]1; +\infty[$ — g atteint son **minimum** en $x = 1$.
- **Valeur du minimum** : $g(1) = 0$.
- Donc $g(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$, soit $\ln x \leq x - 1$ ✓
- **Cas d'égalité** : le minimum étant **strict** de part et d'autre, l'égalité n'a lieu qu'en $x = 1$.
- **Contrôles** : $x = 2$ donne $0,693 \leq 1$ ✓ ; $x = 0,5$ donne $-0,693 \leq -0,5$ ✓
- **Formes équivalentes utiles** : $e^t \geq 1 + t$ (poser $x = e^t$) et $\ln(1 + u) \leq u$.
- **Usage** : c'est l'inégalité de référence pour majorer un logarithme, omniprésente en analyse et en théorie de l'information.

Réponse. $g(x) = x - 1 - \ln x$ a un minimum nul en $x = 1$.

Correction de l'exercice 12 - Fonction puissance générale

- **Écriture exponentielle** : $f(x) = e^{x \ln x}$.
- **Limite en 0^+** : $x \ln x \rightarrow 0$ (croissances comparées), donc $f(x) \rightarrow e^0 = 1$.
- **Limite en $+\infty$** : $x \ln x \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$.
- **Dérivée** : $f'(x) = (\ln x + 1)e^{x \ln x}$, du signe de $\ln x + 1$.
- **Point critique** : $\ln x = -1$, soit $x = e^{-1} \approx 0,3679$.
- **Minimum** : $f(e^{-1}) = e^{-1/e} \approx 0,6922$.
- **Variations** : f décroît sur $]0; e^{-1}]$ puis croît.
- **Contrôles** : $f(0,1) = 0,1^{0,1} \approx 0,794$; $f(0,5) = \sqrt[0,5]{0,5} \approx 0,707$; $f(1) = 1$ ✓ — le minimum 0,692 est bien inférieur à toutes ces valeurs.
- **Curiosité** : f n'est pas définie pour $x < 0$ (sauf certains rationnels) — d'où la restriction à $]0; +\infty[$.

Réponse. Minimum $e^{-1/e} \approx 0,692$ en $x = e^{-1}$; $f \rightarrow 1$ en 0^+ .

Correction de l'exercice 13 - Le nombre de chiffres de 2 puissance 100

Un entier $N \geq 1$ a k chiffres si et seulement si $10^{k-1} \leq N < 10^k$, c'est-à-dire $k-1 \leq \log_{10} N < k$. Donc

$$\text{nombre de chiffres de } N = \lfloor \log_{10} N \rfloor + 1$$

- $\log_{10}(2^{100}) = 100 \log_{10} 2 \approx 30,103$.
- Donc 2^{100} a $\lfloor 30,103 \rfloor + 1 = 31$ chiffres.

— Il commence par 1 : $10^{0,103} \approx 1,27$, et en effet $2^{100} \approx 1,27 \times 10^{30}$.

Réponse. 31 chiffres.

Correction de l'exercice 14 - Comparer deux grandes puissances

— Par les puissances : $2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$ et $3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$. Comme $8 < 9$ et $t \mapsto t^{100}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$2^{300} < 3^{200}$$

— Par les logarithmes : $\ln(2^{300}) = 300 \ln 2 = 100 \ln 8$ et $\ln(3^{200}) = 100 \ln 9$; $\ln$ est strictement croissante, donc même conclusion.

— Le rapport vaut $\left(\frac{9}{8}\right)^{100} \approx 1,3 \times 10^5$: l'écart est considérable.

Réponse. $2^{300} = 8^{100} < 9^{100} = 3^{200}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : équation avec arctan

— **Application de la tangente** : en notant $a = \arctan x$ et $b = \arctan 2x$,

$$\tan(a + b) = \frac{x + 2x}{1 - 2x^2} = 1$$

— **Équation** : $3x = 1 - 2x^2$, soit $2x^2 + 3x - 1 = 0$.

— **Racines** : $\Delta = 9 + 8 = 17$, donc $x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$, soit $x_1 \approx 0,2808$ et $x_2 \approx -1,7808$.

— **Filtrage** : la somme doit valoir $\frac{\pi}{4} > 0$, donc x doit être **positif** (les deux arctangentes ont le signe de x).

— $x_2 < 0$ est donc **à rejeter** : seule x_1 convient.

— **Vérification** : $\arctan(0,2808) + \arctan(0,5616) \approx 0,2737 + 0,5117 = 0,7854 = \frac{\pi}{4}$ ✓

— **Leçon** : la fonction tangente n'étant pas injective sur $\mathbb{R}$, l'équation obtenue peut avoir des solutions **parasites** — la vérification est indispensable.

Réponse. $x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \approx 0,281$.