

Plaquette 5 - Problèmes et modèles avec les fonctions usuelles

Fonctions usuelles et réciproques — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Modèles usuels.

- Croissance ou décroissance exponentielle : $y(t) = y_0 e^{kt}$; temps de doublement $\frac{\ln 2}{k}$.
- Retour vers un équilibre : $T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) e^{-kt}$.
- Échelle logarithmique : niveau sonore $L = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$ (en décibels).
- Loi puissance : $y = Cx^\alpha \Leftrightarrow \ln y = \ln C + \alpha \ln x$ (droite en coordonnées logarithmiques).
- Logistique :

$$f(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}} \quad f = f(1 - f)$$

Correction de l'exercice 1 - La fonction softplus

- $f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} > 0$: f est strictement croissante.
- En $-\infty$, $e^x \rightarrow 0$ et $f(x) \rightarrow \ln 1 = 0$: asymptote $y = 0$.
- En $+\infty$: $f(x) = \ln(e^x(1 + e^{-x})) = x + \ln(1 + e^{-x})$, donc

$$f(x) - x = \ln(1 + e^{-x}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$
- $f''(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} > 0$: f est convexe. C'est une version « lissée » de $x \mapsto \max(0, x)$, utilisée en apprentissage automatique.

Réponse. Croissante, convexe ; asymptotes $y = 0$ et $y = x$.

Correction de l'exercice 2 - Deux solutions

Soit $g(x) = e^x - x - 2$: $g'(x) = e^x - 1$, négative sur $] -\infty ; 0[$, positive ensuite. Minimum $g(0) = -1 < 0$; limites $+\infty$ aux deux bornes.

- Sur chaque intervalle de monotonie, g s'annule exactement une fois (TVI et stricte monotonie).
- Valeurs :

$$g(-2) \approx 0,135 > 0 \quad g(-1) \approx -0,632 < 0 \quad g(1) \approx -0,282 < 0 \quad g(2) \approx 3,389 > 0$$
- Les solutions sont dans $] -2 ; -1[$ ($\approx -1,841$) et dans $]1 ; 2[$ ($\approx 1,146$).

Réponse. Deux solutions : dans $] -2 ; -1[$ et $]1 ; 2[$.

Correction de l'exercice 3 - La courbe logistique

- $f(-t) = \frac{1}{1 + e^t} = \frac{e^{-t}}{e^{-t} + 1} = 1 - \frac{1}{1 + e^{-t}} = 1 - f(t)$: la courbe est symétrique par rapport au point $(0; \frac{1}{2})$.
- Dérivée : $f'(t) = \frac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2} = f(t) \times \frac{e^{-t}}{1 + e^{-t}}$, et le second facteur vaut $1 - f(t)$.
- Dérivée seconde :

$$f' = f(1 - 2f)$$

- elle s'annule et change de signe quand $f = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire en $t = 0$: croissance d'abord accélérée, puis ralentie (épidémies, adoption d'une technologie).

Réponse. Symétrie centrale ; $f' = f(1 - f)$; inflexion en $(0; \frac{1}{2})$.

Correction de l'exercice 4 - Les décibels

Si l'intensité est multipliée par k , le niveau augmente de

$$10 \log_{10} \frac{kI}{I_0} - 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} = 10 \log_{10} k$$

- Doubler l'intensité : $10 \log_{10} 2 \approx 3$ dB de plus.
- Dix instruments (intensités qui s'ajoutent) : $10 \log_{10} 10 = 10$ dB de plus.
- Un orchestre de 10 violons à 60 dB chacun produit donc 70 dB, et non 600 dB : l'échelle logarithmique « écrase » les multiplications en additions.

Réponse. +3 dB ; +10 dB.

Correction de l'exercice 5 - Refroidissement d'un café

$$\text{a) } T(10) = 60 \Leftrightarrow 70 e^{-10k} = 40 \Leftrightarrow e^{-10k} = \frac{4}{7}, \text{ d'où}$$

$$k = \frac{1}{10} \ln \frac{7}{4} \approx 0,0560 \text{ min}^{-1}$$

- b) $T(t) = 30 \Leftrightarrow e^{-kt} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow t = \frac{\ln 7}{k} = \frac{10 \ln 7}{\ln \frac{7}{4}} \approx 34,8$ minutes.
- Le café n'atteint jamais 20 °C : l'écart à la température ambiante décroît exponentiellement vers 0.

Réponse. a) $k = \frac{\ln(7/4)}{10} \approx 0,056$ · b) environ 35 min.

Correction de l'exercice 6 - Inverser $x e^x$

- $h'(x) = (1+x)e^x > 0$ sur $] -1; +\infty[$; $h(-1) = -\frac{1}{e}$ et $h \rightarrow +\infty$: bijection de $[-1; +\infty[$ sur $[-\frac{1}{e}; +\infty[$.
- $h(0) = 0$ et $h(1) = e$: $W(0) = 0$, $W(e) = 1$.
- Pour $y > 0$, avec $x = W(y) > 0$:

$$W'(y) = \frac{1}{h'(x)} = \frac{1}{(1+x)e^x} = \frac{x}{(1+x)x e^x} = \frac{W(y)}{y(1+W(y))}$$

- W (fonction de Lambert) ne s'exprime pas avec les fonctions usuelles, mais on connaît sa dérivée.

Réponse. Bijection sur $[-\frac{1}{e}; +\infty[$; $W(0) = 0$, $W(e) = 1$.

Correction de l'exercice 7 - Une équation entre puissances

On passe au logarithme (les deux membres sont strictement positifs) :

$$\sqrt{x} \ln x = x \ln \sqrt{x} = \frac{x}{2} \ln x \Leftrightarrow \ln x \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2} \right) = 0$$

- $\ln x = 0$ donne $x = 1$.
- $\sqrt{x} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = x \Leftrightarrow \sqrt{x}(2 - \sqrt{x}) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ (car $x > 0$).
- Solutions : $\{1; 4\}$. Vérification pour 4 : $4^2 = 16$ et $2^4 = 16$.

Réponse. $\{1; 4\}$.

Correction de l'exercice 8 - Diviser par deux jusqu'à 1

Après k divisions, on obtient $\frac{N}{2^k}$. On veut

$$\frac{N}{2^k} \leq 1 \Leftrightarrow 2^k \geq N \Leftrightarrow k \geq \log_2 N$$

- Le nombre minimal de divisions est $\lceil \log_2 N \rceil$. Pour $N = 10^6$: $\log_2 10^6 \approx 19,93$, soit 20 divisions.
- Dans une liste triée d'un million de noms, une recherche dichotomique trouve un élément en au plus 20 comparaisons, contre jusqu'à un million pour une recherche un par un.

Réponse. $\lceil \log_2 N \rceil$; 20 pour $N = 10^6$.

Correction de l'exercice 9 - Reconnaître une loi puissance

- $x = 1$ donne $C = 3$.
- $x = 8 : 12 = 3 \times 8^\alpha$, soit $8^\alpha = 4$; en passant au logarithme :

$$\alpha = \frac{\ln 4}{\ln 8} = \frac{2 \ln 2}{3 \ln 2} = \frac{2}{3}$$

- Préviation : $y = 3 \times 27^{2/3} = 3 \times 9 = 27$.
- En coordonnées $(\ln x, \ln y)$, les points sont alignés sur une droite de pente α : c'est ainsi qu'on repère une loi puissance sur des données.

Réponse. $C = 3$, $\alpha = \frac{2}{3}$; $y = 27$.

Correction de l'exercice 10 - La règle de 70

Après n ans, le capital est multiplié par $(1 + \frac{r}{100})^n$. Il double si

$$\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n = 2 \Leftrightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln \left(1 + \frac{r}{100}\right)}$$

- Pour r petit, $\ln(1 + u) \approx u$, donc $n \approx \frac{\ln 2}{r/100} = \frac{100 \ln 2}{r} \approx \frac{69,3}{r}$: d'où la règle de 70.
- Application : $\frac{\ln 2}{\ln 1,07} \approx 10,24$ ans, et la règle donne $\frac{70}{7} = 10$ ans.

Réponse. $n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + r/100)}$; $\approx 10,2$ ans pour 7 %.

Correction de l'exercice 11 - Changement de base

a) Par la formule de changement de base :

$$\log_a b \times \log_b a = \frac{\ln b}{\ln a} \times \frac{\ln a}{\ln b} = 1$$

- b) **Par l'absurde**, supposons $\log_2 3 = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers strictement positifs (car $\log_2 3 > 0$). Alors $2^{p/q} = 3$, soit $2^p = 3^q$.
- Le membre de gauche est pair, celui de droite impair : contradiction. Donc $\log_2 3 \approx 1,585$ est irrationnel.

Réponse. a) formule de changement de base · b) $2^p = 3^q$ impossible (parité).

Correction de l'exercice 12 - Arcsinus au-dessus de x

— $h(x) = \arcsin x - x : h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \geq 0$ sur $[0; 1[$ et $h(0) = 0$, donc $h \geq 0$ (et par continuité en 1).

— Pour la seconde, avec $\theta = \arcsin x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on sait que $\theta \leq \tan \theta$, et

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

— D'où $x \leq \arcsin x \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$: par exemple $0,5 \leq \frac{\pi}{6} \approx 0,524 \leq \frac{0,5}{\sqrt{0,75}} \approx 0,577$.

Réponse. Étude de $\arcsin x - x$; puis $\theta \leq \tan \theta$.

Correction de l'exercice 13 - Sinus hyperbolique et identité

Soit $k(x) = \operatorname{sh} x - x : k'(x) = \operatorname{ch} x - 1 \geq 0$, donc k est croissante, et $k(0) = 0$.

$$x \geq 0 \Rightarrow k(x) \geq 0 \quad x \leq 0 \Rightarrow k(x) \leq 0$$

— La tangente en 0 à la courbe de sh est $y = x$ ($\operatorname{sh} 0 = 0$, $\operatorname{sh}'(0) = 1$). La courbe est au-dessus pour $x > 0$, au-dessous pour $x < 0$: 0 est un point d'inflexion.

— Même situation que pour $\tan$, et inverse de celle de $\sin$ et $\arctan$.

Réponse. $k = \operatorname{sh} - \operatorname{id}$ croissante, nulle en 0 ; inflexion en 0.

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

a) **Faux** : pour $x < 0$, $\ln x$ n'est pas défini. La formule correcte est

$$\ln(x^2) = 2 \ln |x|$$

b) **Vrai** : $\exp$ et $\ln$ sont réciproques.

c) **Vrai**, pour la même raison.

d) **Faux** : sa dérivée $(\ln x + 1)x^x$ est négative sur $]0; \frac{1}{e}[$; la fonction décroît jusqu'à $\frac{1}{e}$, puis croît.

Réponse. a) faux · b) vrai · c) vrai · d) faux.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : le meilleur angle de vue

a) Le haut du tableau est vu sous l'angle $\arctan \frac{3}{x}$ au-dessus de l'horizontale, le bas sous $\arctan \frac{1}{x}$; θ est leur différence.

b) En dérivant :

$$\theta'(x) = \frac{-\frac{3}{x^2}}{1 + \frac{9}{x^2}} + \frac{\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = -\frac{3}{x^2 + 9} + \frac{1}{x^2 + 1}$$

— $\theta'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 9 = 3x^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 = 3$; θ' est positive avant $\sqrt{3}$ et négative après : maximum en $x = \sqrt{3} \approx 1,73$ m.

— $\theta_{\max} = \arctan \sqrt{3} - \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$, soit 30° .

Réponse. $x = \sqrt{3} \approx 1,73$ m ; angle $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$.