

Plaquette 3 - Fonctions trigonométriques réciproques

Fonctions usuelles et réciproques — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Réciproques et dérivées.

$$\arcsin' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \arccos' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \arctan' = \frac{1}{1+x^2}$$

— $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ et $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ (racines positives, car les angles sont dans les bons intervalles).

— $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

— Addition : $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$; donc si $xy < 1$,

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$$

— $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$; $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \pm \frac{\pi}{2}$ selon le signe de x .

Correction de l'exercice 1 - Composer sinus et arcsinus

— Soit $\theta = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$: $\cos \theta \geq 0$ et $\sin \theta = x$. Donc

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \quad (x \in [-1; 1])$$

— $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in]-1; 1[$ (le cosinus ne s'annule pas).

— Soit $\varphi = \arctan x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$: $\cos \varphi > 0$ et $1 + \tan^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$, donc $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin \varphi = \tan \varphi \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Réponse. $\sqrt{1-x^2}$; $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Correction de l'exercice 2 - Une somme d'arctangentes au-delà de $\pi/2$

Soit $S = \arctan 2 + \arctan 3$. Les deux angles sont dans $\left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$ (car $2 > 1$ et $3 > 1$), donc $S \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$.

$$\tan S = \frac{2+3}{1-2 \times 3} = \frac{5}{-5} = -1$$

— L'angle de $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ de tangente -1 est $\frac{3\pi}{4}$: $S = \frac{3\pi}{4}$.

— Piège : la formule $\arctan \frac{x+y}{1-xy}$ donnerait $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$, faux ici car $xy = 6 > 1$. Il faut toujours localiser l'angle.

Réponse. $\frac{3\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 3 - La formule de Machin

Soit $\alpha = \arctan \frac{1}{5}$. Avec $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$:

$$\tan 2\alpha = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12} \quad \tan 4\alpha = \frac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}$$

— Avec $\beta = \arctan \frac{1}{239}$: $\tan(4\alpha - \beta) = \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119 \times 239}} = \frac{28\,680 - 119}{28\,441 + 120} = \frac{28\,561}{28\,561} = 1$.

— Localisation : $0 < \alpha < \frac{\pi}{12}$ (car $\frac{1}{5} < \tan \frac{\pi}{12} \approx 0,268$), donc $0 < 4\alpha - \beta < \frac{\pi}{3}$; l'angle de tangente 1 dans cet intervalle est $\frac{\pi}{4}$.

— Cette formule, combinée au développement de arctan, a longtemps servi à calculer des décimales de π .

Réponse. $\tan(4\alpha - \beta) = 1$ avec $4\alpha - \beta \in]0; \frac{\pi}{3}[$.

Correction de l'exercice 4 - Une composée inattendue

— $|2x| \leq 1 + x^2$ car $(|x| - 1)^2 \geq 0$: l'argument est dans $[-1; 1]$, f est définie sur $\mathbb{R}$.

— Soit $x \in [-1; 1]$ et $\theta = \arctan x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. Alors $2\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{2x}{1 + x^2}$$

— Comme 2θ est dans l'intervalle de référence de arcsin : $f(x) = 2\theta = 2 \arctan x$.

— Pour $x \geq 1$, on obtient de même $f(x) = \pi - 2 \arctan x$: f n'est pas dérivable en 1 (point anguleux).

Réponse. $\sin(2 \arctan x) = \frac{2x}{1 + x^2}$ et $2 \arctan x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Correction de l'exercice 5 - Deux dérivées

— Composée avec $u = \sqrt{x}$, $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$:

$$f'(x) = \frac{u'}{1 + u^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1 + x)}$$

— Pour g , avec $v = 1 - 2x \in]-1; 1[$:

$$g'(x) = -\frac{v'}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 - (1 - 2x)^2}} = \frac{2}{\sqrt{4x - 4x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x(1 - x)}}$$

— Ces deux dérivées réapparaîtront comme intégrandes : $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1 - x)}}$ se calcule grâce à g .

Réponse. $f' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1 + x)}$; $g' = \frac{1}{\sqrt{x(1 - x)}}$.

Correction de l'exercice 6 - Arcsinus égal arccosinus

Comme $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, l'équation équivaut à

$$2 \arcsin x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arcsin x = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

— Unique solution : $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- Interprétation : c'est l'abscisse où la courbe croissante de arcsin croise la courbe décroissante de arccos ; l'angle correspondant est $\frac{\pi}{4}$, pour lequel sinus et cosinus sont égaux.

Réponse. $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Correction de l'exercice 7 - Une équation avec deux arctangentes

- Le membre de gauche est une fonction strictement croissante, nulle en 0 : une solution éventuelle est unique et positive.
- Pour $x > 0$ avec $2x^2 < 1$, les deux angles sont dans $]0; \frac{\pi}{2}[$ et leur somme vaut $\frac{\pi}{4}$ si et seulement si sa tangente vaut 1 :

$$\frac{x + 2x}{1 - 2x^2} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 1 = 0$$

- La racine positive est $x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \approx 0,281$, et elle vérifie bien $2x^2 < 1$.
- Solution unique : $x = \frac{\sqrt{17} - 3}{4}$.

Réponse. $x = \frac{\sqrt{17} - 3}{4}$.

Correction de l'exercice 8 - La courbe de l'arctangente

- Impaire, strictement croissante ($\arctan' = \frac{1}{1+x^2} > 0$), de limites $\pm \frac{\pi}{2}$ en $\pm \infty$: asymptotes horizontales $y = \pm \frac{\pi}{2}$.
- Tangente en 0 : $y = x$, car $\arctan 0 = 0$ et $\arctan'(0) = 1$.
- Dérivée seconde :

$$\arctan''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

- négative pour $x > 0$ (concave), positive pour $x < 0$ (convexe) : 0 est un point d'inflexion.
- Position : $\arctan x \leq x$ pour $x \geq 0$ (courbe sous sa tangente), et l'inverse pour $x \leq 0$.

Réponse. Impaire, croissante, asymptotes $\pm \frac{\pi}{2}$, inflexion en 0 avec tangente $y = x$.

Correction de l'exercice 9 - Un encadrement de l'arctangente

- $h_1(x) = x - \arctan x$: $h_1'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0$ et $h_1(0) = 0$, donc $h_1 \geq 0$.
- $h_2(x) = \arctan x - x + \frac{x^3}{3}$:

$$h_2'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 = \frac{x^4}{1+x^2} \geq 0$$

- et $h_2(0) = 0$, donc $h_2 \geq 0$.
- Application : $\arctan 0,1 \in [0,099\,666; 0,1]$; la vraie valeur est 0,099 669 : l'encadrement est très précis près de 0.

Réponse. Dérivées $\frac{x^2}{1+x^2}$ et $\frac{x^4}{1+x^2}$ positives.

Correction de l'exercice 10 - Arcsinus d'un complémentaire

On pose $x = \sin \theta$ avec $\theta = \arcsin x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (car $x \geq 0$). Alors

$$\sqrt{1-x^2} = \cos \theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \text{ et } \frac{\pi}{2} - \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]:$$

$$\arcsin \sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2} - \theta$$

- D'où la somme $\theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}$.
- Pour $x \in [-1; 0]$, c'est faux : $x = -1$ donne $-\frac{\pi}{2} + 0 \neq \frac{\pi}{2}$. L'hypothèse $x \geq 0$ sert à placer θ .

Réponse. Substitution $x = \sin \theta$, $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

Correction de l'exercice 11 - Une primitive de l'arctangente

On dérive terme à terme :

$$F'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2} \times \frac{2x}{1+x^2} = \arctan x$$

- F est donc une primitive de $\arctan$ sur $\mathbb{R}$.
- Cette primitive s'obtient par intégration par parties ($\int 1 \times \arctan x \, dx$) ; ici, on la vérifie simplement en dérivant.
- Application future : $\int_0^1 \arctan x \, dx = F(1) - F(0) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

Réponse. $F' = \arctan$: primitive de $\arctan$.

Correction de l'exercice 12 - La fonction $\arctan(\tan x)$

Pour $x \in \left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[$, on a $x - \pi \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ et $\tan(x - \pi) = \tan x$:

$$\arctan(\tan x) = x - \pi$$

- Plus généralement, sur $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$, $\arctan(\tan x) = x - k\pi$.
- La courbe est une « scie » : des segments de pente 1, de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, répétés tous les π ; la fonction n'est pas définie aux points $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

Réponse. $x - \pi$; en général $x - k\pi$.

Correction de l'exercice 13 - Une limite à l'infini

Pour $x > 0$, $\frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan \frac{1}{x}$. Avec $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$:

$$x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \frac{\arctan t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \arctan'(0) = 1$$

- La limite vaut 1 : $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$.
- Conséquence : $\arctan x$ s'approche de son asymptote comme $\frac{1}{x}$, lentement.

Réponse. 1.

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

- Vrai** : par définition, $\arcsin x$ est un angle de sinus x .
- Faux** : $\arcsin(\sin \pi) = 0 \neq \pi$.
- Faux** : $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$; par exemple $\arccos(-1) = \pi$ et $-\arccos 1 = 0$.

$$\arccos(-x) + \arccos x = \pi$$

d) **Faux** : l'image est l'intervalle **ouvert** $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$; $\pm \frac{\pi}{2}$ ne sont pas atteints.

Réponse. a) vrai · b) faux · c) faux · d) faux.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une fonction constante par morceaux

a) Avec $u = \frac{1+x}{1-x}$, $u' = \frac{2}{(1-x)^2}$ et $1+u^2 = \frac{2(1+x^2)}{(1-x)^2}$:

$$\frac{u'}{1+u^2} = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{donc} \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

— b) f est constante sur chacun des **intervalles** $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$.

— Sur le premier : $f(0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

— Sur le second : quand $x \rightarrow +\infty$, $u \rightarrow -1$, donc $f(x) \rightarrow -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}$.

— Ainsi $\arctan \frac{1+x}{1-x} = \arctan x + \frac{\pi}{4}$ pour $x < 1$, et $\arctan x - \frac{3\pi}{4}$ pour $x > 1$.

Réponse. a) $f = 0$ · b) $\frac{\pi}{4}$ sur $]-\infty; 1[$, $-\frac{3\pi}{4}$ sur $]1; +\infty[$.