

Plaquette 2 – Exponentielles, logarithmes et puissances

Fonctions usuelles et réciproques — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Toutes les puissances réelles se ramènent à l'exponentielle : $a^x = e^{x \ln a}$ pour $a > 0$. Pour résoudre une équation, on **pose une inconnue auxiliaire** ($t = 2^x$ transforme 4^x en t^2) ou on **passé au logarithme**, sans oublier le **domaine** de définition. Pour comparer des quantités très grandes, on compare leurs logarithmes. Les modèles de croissance ou de décroissance (radioactivité, intérêts, pH) s'écrivent avec e^{kt} ou $\log_{10}$.

Exercice 1 – Logarithmes de bases différentes

Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation $\log_2 x + \log_4 x = 3$.

Exercice 2 – Une équation en 2 puissance x

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $4^x - 3 \times 2^x + 2 = 0$.

Exercice 3 – Une inéquation logarithmique

Résoudre $\ln(x - 1) + \ln(x + 1) < \ln 3$.

Exercice 4 – Deux puissances égales

Trouver tous les couples d'entiers $1 \leq x < y$ tels que $x^y = y^x$, en étudiant $g(t) = \frac{\ln t}{t}$.

Exercice 5 – Racine contre logarithme

Comparer $\sqrt{x}$ et $10 \ln x$ pour $x = 100$, $x = 10^4$ et $x = 10^6$. Que dit la théorie ?

Exercice 6 – La datation au carbone 14

Le carbone 14 a une demi-vie de 5 730 ans. Quelle fraction du carbone 14 initial reste-t-il au bout de 10 000 ans ? Au bout de combien de temps en reste-t-il 10 % ?

Exercice 7 – Intérêts composés

Un capital est placé à 3 % par an pendant 10 ans. Comparer le coefficient multiplicateur avec des intérêts annuels, et avec des intérêts « continus » (coefficient e^{rt}).

Exercice 8 – Le pH

Le pH d'une solution est $\text{pH} = -\log_{10} [\text{H}^+]$, où $[\text{H}^+]$ est la concentration en ions en mol/L. Calculer le pH pour $[\text{H}^+] = 3,2 \times 10^{-5}$. Que devient la concentration quand le pH diminue de 1 ?

Exercice 9 - Le nombre de bits

Combien de chiffres binaires faut-il pour écrire 1 000 en base 2 ? Combien de chiffres décimaux a 2^{64} ?

Exercice 10 - Caractériser l'exponentielle

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f' = kf$ et $f(0) = 1$. Montrer que $f(x) = e^{kx}$.

Exercice 11 - Une suite croissante vers e

Soit $h(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ sur $]0; +\infty[$. En admettant que $\ln(1+u) > \frac{u}{1+u}$ pour $u > 0$, montrer que h est croissante. En déduire que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ est croissante.

Exercice 12 - Exponentielle contre puissance

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^{10}}$.

Exercice 13 - Dériver des puissances variables

Dériver $f(x) = 2^x$, $g(x) = x^{\sqrt{2}}$ et $h(x) = (\ln x)^x$ (pour $x > 1$).

Exercice 14 - Vrai ou faux ?

Pour $a, b > 0$ et x, y réels :

- a) $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$.
- b) $a^{x+y} = a^x a^y$.
- c) $(a^x)^y = a^{xy}$.
- d) $a^{x^y} = (a^x)^y$.

Exercice 15 - Synthèse : 2 puissance $x = x^2$

Combien l'équation $2^x = x^2$ a-t-elle de solutions réelles ? Donner les solutions évidentes et localiser l'autre.