

Plaquette 4 – Fonctions hyperboliques : formules et équations

Fonctions usuelles et réciproques — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Les fonctions hyperboliques se définissent par des exponentielles : $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$. Pour démontrer une formule, on **remplace par les exponentielles** et on développe. Pour résoudre une équation, on pose $t = e^x > 0$: l'équation devient polynomiale en t , et on ne garde que les racines **strictement positives**. Les formules ressemblent à celles de la trigonométrie, avec des changements de signe ($\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$).

Exercice 1 – Premières propriétés

Montrer que $\operatorname{ch} x \geq 1$ pour tout x , que $\operatorname{sh} x < \operatorname{ch} x$, et que $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$.

Exercice 2 – Formule d'addition

Démontrer que $\operatorname{ch}(a + b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$. En déduire $\operatorname{ch}(2x)$ en fonction de $\operatorname{ch} x$.

Exercice 3 – Résoudre $\operatorname{ch} x = 2$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{ch} x = 2$.

Exercice 4 – Une équation mixte

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = 3$.

Exercice 5 – La tangente hyperbolique et sa réciproque

Montrer que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1 ; 1[$ et que $\operatorname{argth}(y) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}$.

Exercice 6 – Dérivée de la tangente hyperbolique

Montrer que $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2$, puis en déduire la dérivée de argth de deux façons.

Exercice 7 – Linéariser sh au cube

Montrer que $\operatorname{sh}^3 x = \frac{\operatorname{sh}(3x) - 3\operatorname{sh} x}{4}$.

Exercice 8 – La chaînette

Un câble suspendu prend la forme de la courbe $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ ($a > 0$). Déterminer son point le plus bas, la pente en $x = a$, et comparer la courbe à la parabole $y = a + \frac{x^2}{2a}$.

Exercice 9 - Minorer le cosinus hyperbolique

Montrer que pour tout réel x : $\operatorname{ch} x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$.

Exercice 10 - Paramétrer une hyperbole

Montrer que le point $M(t) = (\operatorname{ch} t; \operatorname{sh} t)$ décrit une branche de l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$. Laquelle ? Chaque point de cette branche est-il atteint une seule fois ?

Exercice 11 - Limite de la tangente hyperbolique

Montrer que $\operatorname{th} x = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$ et en déduire la limite en $+\infty$ et la vitesse d'approche.

Exercice 12 - Dérivées successives

Déterminer $\operatorname{ch}^{(n)}$ et $\operatorname{sh}^{(n)}$ pour tout n . Résoudre $f' = f$ parmi les fonctions de la forme $A\operatorname{ch} + B\operatorname{sh}$ avec $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$.

Exercice 13 - Addition des tangentes hyperboliques

Montrer que $\operatorname{th}(a + b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$. Interpréter pour des vitesses : si $\operatorname{th} a = 0,6$ et $\operatorname{th} b = 0,6$, que vaut $\operatorname{th}(a + b)$?

Exercice 14 - Vrai ou faux ?

- a) ch est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $[1; +\infty[$.
- b) $\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.
- c) $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 1$.
- d) ch et sh sont équivalentes à $\frac{e^x}{2}$ en $+\infty$.

Exercice 15 - Synthèse : le gudermannien

Soit $g(x) = 2 \arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}$.

- a) Montrer que $g'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ et que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
- b) Montrer que $\sin(g(x)) = \operatorname{th} x$.