

Plaquette 5 – Problèmes et modèles avec les fonctions usuelles**Fonctions usuelles et réciproques — Licence 1 (L1)**

Exercices

Méthode

Dans un problème, on commence par **traduire** la situation par une fonction (loi de refroidissement, niveau sonore, angle de vue), puis on mobilise l'outil adapté : **équation** (en isolant l'exponentielle et en passant au logarithme), **étude de variations** (pour un maximum), **réciproque** (pour « inverser » un modèle). On termine toujours par une **interprétation** dans le contexte, avec des valeurs numériques cohérentes (unités, ordres de grandeur).

Exercice 1 – La fonction softplus

Soit $f(x) = \ln(1 + e^x)$. Étudier ses variations, montrer que $y = 0$ est asymptote en $-\infty$ et $y = x$ en $+\infty$, et étudier sa convexité.

Exercice 2 – Deux solutions

Montrer que l'équation $e^x = x + 2$ a exactement deux solutions réelles, et les localiser entre deux entiers consécutifs.

Exercice 3 – La courbe logistique

Soit $f(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}$. Montrer que $f(-t) = 1 - f(t)$, que $f' = f(1 - f)$, et que la courbe a un point d'inflexion en 0.

Exercice 4 – Les décibels

Le niveau sonore d'un son d'intensité I est $L = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$ (en dB). De combien augmente-t-il quand on double l'intensité ? Quand on fait jouer 10 instruments identiques au lieu d'un ?

Exercice 5 – Refroidissement d'un café

Un café à 90 °C refroidit dans une pièce à 20 °C selon $T(t) = 20 + 70e^{-kt}$ (t en minutes). Au bout de 10 minutes, il est à 60 °C.

- Déterminer k .
- Au bout de combien de temps est-il à 30 °C ?

Exercice 6 – Inverser $x e^x$

Soit $h(x) = x e^x$ sur $[-1 ; +\infty[$. Montrer que h est une bijection sur un intervalle à préciser. On note W sa réciproque : calculer $W(0)$, $W(e)$ et montrer que

$$W'(y) = \frac{W(y)}{y(1 + W(y))} \text{ pour } y > 0.$$

Exercice 7 - Une équation entre puissances

Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

Exercice 8 - Diviser par deux jusqu'à 1

Combien de fois faut-il diviser N par 2 pour obtenir un nombre inférieur ou égal à 1 ?
Application : $N = 10^6$. Quel lien avec la recherche dichotomique dans une liste triée ?

Exercice 9 - Reconnaître une loi puissance

Une grandeur vérifie $y = Cx^\alpha$. On mesure $y = 3$ pour $x = 1$ et $y = 12$ pour $x = 8$.
Déterminer C et α , puis prévoir y pour $x = 27$.

Exercice 10 - La règle de 70

Un capital croît de $r\%$ par an. Montrer que son temps de doublement vaut $\frac{\ln 2}{\ln(1 + r/100)}$, puis justifier l'approximation « 70 divisé par r ». Application : $r = 7$.

Exercice 11 - Changement de base

- a) Montrer que $\log_a b \times \log_b a = 1$ pour $a, b > 0$ différents de 1.
- b) Montrer que $\log_2 3$ est irrationnel.

Exercice 12 - Arcsinus au-dessus de x

Montrer que pour $x \in [0; 1]$, $\arcsin x \geq x$, et que pour $x \in [0; 1[$, $\arcsin x \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 13 - Sinus hyperbolique et identité

Montrer que $\operatorname{sh} x \geq x$ pour $x \geq 0$ et $\operatorname{sh} x \leq x$ pour $x \leq 0$. Placer la courbe de sh par rapport à sa tangente en 0.

Exercice 14 - Vrai ou faux ?

- a) $\ln(x^2) = 2 \ln x$ pour tout $x \neq 0$.
- b) $e^{\ln x} = x$ pour tout $x > 0$.
- c) $\ln(e^x) = x$ pour tout réel x .
- d) La fonction $x \mapsto x^x$ est croissante sur $]0; +\infty[$.

Exercice 15 - Synthèse : le meilleur angle de vue

Un tableau de 2 m de haut est accroché avec son bord inférieur à 1 m au-dessus des yeux d'un visiteur. À la distance horizontale x du mur, l'angle sous lequel il voit le tableau est $\theta(x) = \arctan \frac{3}{x} - \arctan \frac{1}{x}$.

- a) Justifier cette formule.
- b) Trouver la distance qui maximise θ , et l'angle maximal.