

Plaquette 3 – Fonctions trigonométriques réciproques

Fonctions usuelles et réciproques — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Pour calculer une expression comme $\cos(\arcsin x)$, on pose $\theta = \arcsin x$, on note l'**intervalle** où se trouve θ (ici $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$), puis on utilise $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ avec le **bon signe**. Pour démontrer une identité entre fonctions réciproques, deux méthodes : **dériver** (une fonction de dérivée nulle sur un intervalle est constante, on calcule la constante en un point) ou **appliquer une fonction trigonométrique** aux deux membres, en vérifiant que les deux angles sont dans un intervalle où cette fonction est injective.

Exercice 1 – Composer sinus et arcsinus

Simplifier, pour x dans le domaine convenable : $\cos(\arcsin x)$, $\tan(\arcsin x)$ et $\sin(\arctan x)$.

Exercice 2 – Une somme d'arctangentes au-delà de $\pi/2$

Calculer $\arctan 2 + \arctan 3$.

Exercice 3 – La formule de Machin

Montrer que $4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 4 – Une composée inattendue

Soit $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$, puis montrer que $f(x) = 2 \arctan x$ pour $|x| \leq 1$.

Exercice 5 – Deux dérivées

Dériver $f(x) = \arctan \sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$ et $g(x) = \arccos(1 - 2x)$ sur $]0; 1[$.

Exercice 6 – Arcsinus égal arccosinus

Résoudre dans $[-1; 1]$ l'équation $\arcsin x = \arccos x$.

Exercice 7 – Une équation avec deux arctangentes

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\arctan x + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 8 – La courbe de l'arctangente

Étudier la fonction $\arctan$: parité, variations, limites, tangente en 0, convexité. Placer la courbe par rapport à sa tangente en 0.

Exercice 9 – Un encadrement de l'arctangente

Montrer que pour $x \geq 0$: $x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan x \leq x$.

Exercice 10 – Arcsinus d'un complémentaire

Montrer que pour $x \in [0; 1]$: $\arcsin x + \arcsin \sqrt{1 - x^2} = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 11 – Une primitive de l'arctangente

Soit $F(x) = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$. Calculer F' . Que peut-on en conclure ?

Exercice 12 – La fonction $\arctan(\tan x)$

Simplifier $\arctan(\tan x)$ pour $x \in \left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[$, puis décrire la courbe de $x \mapsto \arctan(\tan x)$.

Exercice 13 – Une limite à l'infini

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$.

Exercice 14 – Vrai ou faux ?

- a) Pour tout $x \in [-1; 1]$, $\sin(\arcsin x) = x$.
- b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arcsin(\sin x) = x$.
- c) $\arccos$ est impaire.
- d) $\arctan$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 15 – Synthèse : une fonction constante par morceaux

Soit $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x} - \arctan x$ pour $x \neq 1$.

- a) Calculer $f(x)$.
- b) En déduire l'expression de f sur $] -\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.