

Fonctions usuelles et réciproques — L1

Exp, ln, puissances, arcsin/arccos/arctan, hyperboliques et compositions

1. Exponentielle

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad e^{-x} = 1/e^x.$$

$$(e^x)' = e^x > 0$$

$\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est strictement croissante et bijective.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

Composition :

$$(e^u)' = u' e^u.$$

Inégalité : $e^x \geq 1 + x$.

2. Logarithme

ln est la réciproque de exp :

$$\ln(e^x) = x, \quad e^{\ln x} = x \quad (x > 0).$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y,$$

$$\ln(x/y) = \ln x - \ln y.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = +\infty.$$

Pour $\ln(u)$: exiger $u > 0$ et

$$(\ln u)' = u'/u.$$

3. Puissances réelles

Pour $\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$:

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Si $\alpha > 0$: croissante ; si $\alpha < 0$: décroissante sur $]0, \infty[$.

Attention : pour $\alpha \notin \mathbb{Z}$, le domaine n'est pas automatiquement tout $\mathbb{R}$.

4. Croissances comparées

Pour $\alpha, \beta > 0$:

$$\ln x = o(x^\alpha) \quad (x \rightarrow +\infty),$$

$$x^\alpha = o(e^{\beta x}) \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Donc

$$\frac{\ln x}{x^\alpha} \rightarrow 0, \quad \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} \rightarrow 0.$$

Aussi : $x^\alpha |\ln x| \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$.

5. Principe de réciproque

Si $f : I \rightarrow J$ est bijective :

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_I, \quad f \circ f^{-1} = \text{Id}_J.$$

Si $f'(x_0) \neq 0$:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Ne pas confondre f^{-1} et $1/f$.

6. Arcsinus

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2].$$

$$\sin(\arcsin x) = x.$$

Sur $] -1, 1[$:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Impaire, strictement croissante.

7. Arccosinus

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$$

$$\cos(\arccos x) = x.$$

Sur $] -1, 1[$:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Strictement décroissante et

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2.$$

8. Arctangente

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow] -\pi/2, \pi/2[.$$

$$\tan(\arctan x) = x.$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Impaire, strictement croissante.

$$\arctan x \rightarrow \pm\pi/2 \quad (x \rightarrow \pm\infty).$$

9. Intervalles principaux

$$\arcsin(\sin x) = x$$

si $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. (dans la formule directe).

$$\arccos(\cos x) = x \quad \text{pour } x \in [0, \pi].$$

$$\arctan(\tan x) = x$$

pour $x \in] -\pi/2, \pi/2[$. Hors de ces intervalles, il faut ramener l'angle dans l'intervalle principal.

9 bis. Valeurs remarquables

$$\arcsin 0 = 0, \quad \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6},$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \quad \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3},$$

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\arccos 1 = 0, \quad \arccos 0 = \frac{\pi}{2},$$

$$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\arctan 0 = 0, \quad \arctan 1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Utiliser imparité de arcsin et arctan pour les valeurs négatives.

9 ter. Repères graphiques

arcsin : croissante de $-\pi/2$ à $\pi/2$ sur $[-1, 1]$.

arccos : décroissante de π à 0 sur $[-1, 1]$.

arctan : croissante sur $\mathbb{R}$, asymptotes $y = \pm\pi/2$.

10. Simplifications utiles

Pour $x \in [-1, 1]$:

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2},$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Pour $|x| < 1$:

$$\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Le signe de la racine vient de l'intervalle principal de l'angle.

11. Fonctions hyperboliques

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

Identité :

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Parité : ch paire ; sh, th impaires.

12. Dérivées hyperboliques

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x.$$

sh et th sont strictement croissantes.
ch a un minimum en 0 : $\operatorname{ch} 0 = 1$.

$$\operatorname{th} x \rightarrow \pm 1 \quad (x \rightarrow \pm \infty).$$

13. Compositions : dérivées

Pour u dérivable :

$$(e^u)' = u'e^u, \quad (\ln u)' = u'/u,$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u',$$

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}},$$

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}},$$

$$(\arctan u)' = \frac{u'}{1 + u^2}.$$

Toujours vérifier le domaine.

14. Méthode : simplifier

Ex. $\sin(\arccos x)$:

1. poser $\theta = \arccos x$;
2. noter $\theta \in [0, \pi]$;
3. $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - x^2$;
4. sur $[0, \pi]$, $\sin \theta \geq 0$;
5. donc $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.

15. Méthode : étudier une fonction

Checklist :

1. domaine ;
2. parité/symétrie ;
3. limites ;
4. dérivée et signe ;
5. variations ;
6. asymptotes ;
7. valeurs remarquables ;
8. tracé qualitatif.

16. Exemples éclairés

1. $f(x) = \ln(1 + e^x)$:

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} > 0.$$

2. $g(x) = \arctan(x^2)$:

$$g'(x) = \frac{2x}{1 + x^4}.$$

3. $h(x) = e^{-x^2}$:

$$h'(x) = -2xe^{-x^2}.$$

17. Pièges classiques

- $\ln u$ sans vérifier $u > 0$.
- x^α sur $x < 0$ sans vérifier que cela a un sens.
- $\arcsin(\sin x) = x$ pour tout x : faux.
- oublier le signe dans $\sqrt{1 - x^2}$.
- dériver arcsin ou arccos aux extrémités ± 1 avec la formule usuelle.
- confondre $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$ avec l'identité circulaire $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

18. À savoir par cœur

$$e^{\ln x} = x \quad (x > 0), \quad \ln(e^x) = x$$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\arctan' x = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Hiérarchie à $+\infty$:

$$\ln x \ll x^\alpha \ll e^{\beta x} \quad (\alpha, \beta > 0).$$

19. Limites de référence en 0

$$\frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1, \quad \frac{\ln(1 + x)}{x} \rightarrow 1,$$

$$\frac{\arcsin x}{x} \rightarrow 1, \quad \frac{\arctan x}{x} \rightarrow 1.$$

Donc, au voisinage de 0 :

$$e^x - 1 \sim x, \quad \ln(1 + x) \sim x,$$

$$\arcsin x \sim x, \quad \arctan x \sim x.$$

20. Formes hyperboliques utiles

$$\operatorname{th} x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \quad 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x, \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}.$$

$$\text{À } +\infty : \operatorname{ch} x \sim \operatorname{sh} x \sim e^x/2.$$

21. Réflexe domaine

Avant de calculer :

- $\ln u$: $u > 0$;
- $\sqrt{u}$: $u \geq 0$;
- $\arcsin u, \arccos u$: $|u| \leq 1$;
- dérivées de $\arcsin u, \arccos u$: $|u| < 1$;
- puissance réelle u^α : si l'on utilise $e^{\alpha \ln u}$, exiger $u > 0$.