

Fonctions usuelles et réciproques en L1 maths

Exponentielle, logarithme, puissances, fonctions circulaires réciproques et fonctions hyperboliques

Idée directrice. Ce chapitre fixe un catalogue de fonctions que l'on doit savoir reconnaître, dériver, composer et étudier sans hésitation. En L1, l'enjeu n'est pas seulement de connaître une formule : il faut maîtriser le domaine, l'image, les restrictions qui rendent une fonction bijective et les identités qui restent valables après composition avec une fonction réciproque.

1. Principe général : fonction réciproque

Définition

Soit $f : I \rightarrow J$ une application bijective. Sa **fonction réciproque** est l'application

$$f^{-1} : J \rightarrow I$$

définie par

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

Elle vérifie

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_I, \quad f \circ f^{-1} = \text{Id}_J.$$

Pour construire une fonction réciproque, il faut donc d'abord disposer d'une bijection. C'est la raison pour laquelle on **restreint** les fonctions trigonométriques à des intervalles où elles sont strictement monotones.

Dérivée d'une réciproque

Si $f : I \rightarrow J$ est bijective, f dérivable en $x_0 \in I$, f^{-1} continue en $y_0 = f(x_0)$ et $f'(x_0) \neq 0$, alors

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Piège classique

La notation f^{-1} désigne ici une *fonction réciproque*. Elle n'a aucun rapport avec la fonction $x \mapsto 1/f(x)$, parfois notée abusivement f^{-1} dans d'autres contextes.

2. Fonction exponentielle

La fonction exponentielle est la fonction

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[, \quad x \mapsto e^x.$$

On retient les propriétés fondamentales

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \quad e^0 = 1.$$

Théorème

La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, strictement croissante, et

$$(e^x)' = e^x > 0.$$

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

Ainsi $\exp$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$.

Sa courbe passe par $(0, 1)$, reste strictement positive et admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $-\infty$.

Exemple

Pour u dérivable,

$$(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}.$$

Ainsi, pour $F(x) = e^{x^2-3x}$,

$$F'(x) = (2x - 3)e^{x^2-3x}.$$

Comme l'exponentielle est toujours positive, le signe de F' est celui de $2x - 3$.

Une inégalité essentielle**Théorème**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x \geq 1 + x,$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$.

On peut la démontrer en étudiant $g(x) = e^x - x - 1$, dont la dérivée vaut $g'(x) = e^x - 1$.

3. Logarithme népérien

Puisque $\exp$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$, elle possède une réciproque.

Définition

Le **logarithme népérien** est la réciproque de l'exponentielle :

$$\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$\ln y = x \iff e^x = y.$$

En particulier,

$$\ln(e^x) = x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad e^{\ln x} = x \quad (x > 0).$$

Théorème

La fonction $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, strictement croissante, et

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Elle vérifie

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

pour $x, y > 0$, ainsi que

$$\ln(x^n) = n \ln x \quad (n \in \mathbb{Z}, x > 0).$$

Enfin,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

Piège classique

Le logarithme n'est défini que pour un argument strictement positif. Avant de dériver $\ln(u(x))$, il faut donc préciser l'ensemble où $u(x) > 0$.

Exemple

Sur l'ensemble où $x^2 - 1 > 0$,

$$\frac{d}{dx} \ln(x^2 - 1) = \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

Le domaine est $] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

4. Puissances réelles

Pour un exposant réel quelconque, la définition la plus robuste s'appuie sur $\exp$ et $\ln$.

Définition

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, on définit

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

Cette définition prolonge les puissances entières et rationnelles sur $]0, +\infty[$.

Théorème

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Monotonie sur $]0, +\infty[$:

- si $\alpha > 0$, x^α est strictement croissante ;
- si $\alpha = 0$, $x^\alpha = 1$;
- si $\alpha < 0$, x^α est strictement décroissante.

Piège classique

Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, l'expression $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ est, en général, définie seulement pour $x > 0$. Certains exposants rationnels permettent une extension aux réels négatifs, mais il faut alors traiter le domaine au cas par cas.

Exemple

Pour $x > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}.$$

Ces identités sont immédiates à partir de l'écriture exponentielle.

5. Croissances comparées

Les croissances comparées servent à lever de nombreuses formes indéterminées.

Hiérarchie logarithme – puissance – exponentielle

Pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$,

$$\ln x = o(x^\alpha) \quad (x \rightarrow +\infty),$$

$$x^\alpha = o(e^{\beta x}) \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Autrement dit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0.$$

Plus généralement, pour tout entier $n \geq 1$ et tout $t \geq 0$,

$$e^t \geq \frac{t^n}{n!}.$$

Cette inégalité explique pourquoi l'exponentielle domine toute puissance à $+\infty$.

Exemple

Calculons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-2x}.$$

On écrit

$$x^3 e^{-2x} = \frac{x^3}{e^{2x}} \longrightarrow 0.$$

De même,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha |\ln x| = 0 \quad (\alpha > 0),$$

ce que l'on obtient par le changement de variable $t = 1/x$.

6. Fonctions circulaires réciproques

Les fonctions sin, cos et tan ne sont pas bijectives sur $\mathbb{R}$. On choisit donc des intervalles où elles sont bijectives.

Arcsinus

La restriction

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

est strictement croissante et bijective.

Définition

Sa réciproque est

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Ainsi

$$\sin(\arcsin x) = x \quad (x \in [-1, 1]).$$

Sur $] -1, 1[$,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La fonction est strictement croissante et impaire. Aux points $x = \pm 1$, la courbe possède des tangentes verticales.

Arccosinus

La restriction

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

est strictement décroissante et bijective.

Définition

Sa réciproque est

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$$

Ainsi

$$\cos(\arccos x) = x \quad (x \in [-1, 1]).$$

Sur $] -1, 1[$,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La fonction est strictement décroissante et

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Arctangente

La restriction

$$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$$

est strictement croissante et bijective.

Définition

Sa réciproque est

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Elle est strictement croissante, impaire, et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}.$$

Sa courbe admet donc deux asymptotes horizontales.

Tableau synthétique

Fonction	Domaine	Image	Dérivée
arcsin	$[-1, 1]$	$[-\pi/2, \pi/2]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $] -1, 1[$
arccos	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $] -1, 1[$
arctan	$\mathbb{R}$	$] -\pi/2, \pi/2[$	$\frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$

7. Composer correctement avec une réciproque

Une identité de réciproque n'est valable que sur les domaines appropriés.

Identités sans ambiguïté

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin x) &= x \quad (x \in [-1, 1]), \\ \cos(\arccos x) &= x \quad (x \in [-1, 1]), \\ \tan(\arctan x) &= x \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Dans l'autre sens,

$$\begin{aligned} \arcsin(\sin x) &= x \quad \text{seulement si } x \in [-\pi/2, \pi/2], \\ \arccos(\cos x) &= x \quad \text{seulement si } x \in [0, \pi], \\ \arctan(\tan x) &= x \quad \text{seulement si } x \in]-\pi/2, \pi/2[. \end{aligned}$$

Piège classique

Écrire $\arcsin(\sin x) = x$ pour tout réel x est faux. Par exemple

$$\arcsin(\sin(3\pi/4)) = \arcsin(\sqrt{2}/2) = \pi/4 \neq 3\pi/4.$$

Simplifications classiques

Si $x \in [-1, 1]$ et $\theta = \arccos x$, alors $\theta \in [0, \pi]$, donc $\sin \theta \geq 0$. Par conséquent

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}.$$

De même, puisque $\arcsin x \in [-\pi/2, \pi/2]$ et le cosinus y est positif,

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Pour $|x| < 1$,

$$\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Méthode de simplification

Pour simplifier une expression comme $\sin(\arccos x)$:

1. poser $\theta = \arccos x$ et noter précisément l'intervalle auquel appartient θ ;
2. utiliser l'identité trigonométrique adéquate ;
3. choisir le bon signe de la racine grâce à l'intervalle de θ .

8. Fonctions hyperboliques

Les fonctions hyperboliques sont construites à partir de l'exponentielle.

Définition

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Comme $\operatorname{ch} x > 0$ pour tout x , la tangente hyperbolique est définie sur tout $\mathbb{R}$.

Identité hyperbolique fondamentale

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Preuve. En développant à partir des définitions,

$$\frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4} = 1.$$

Parité, dérivées et variations

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x \quad (\text{paire}), \quad \operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x \quad (\text{impaire}),$$

$$\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x \quad (\text{impaire}).$$

Théorème

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x.$$

Conséquences :

— sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $\operatorname{ch} x > 0$;

- ch décroît sur $] -\infty, 0]$ puis croît sur $[0, +\infty[$, avec minimum $\operatorname{ch} 0 = 1$;
- th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans $] -1, 1[$.

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{th} x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{th} x = -1.$$

Exemple

Grâce à $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$,

$$1 - \operatorname{th}^2 x = 1 - \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

Cette identité apparaît fréquemment dans les dérivations et les intégrales.

9. Dériver des expressions composées

Identifier la fonction extérieure

Pour dériver une composition, procéder de l'extérieur vers l'intérieur.

- $\ln(u) : (\ln u)' = \frac{u'}{u}$ sur $u > 0$;
- $e^u : (e^u)' = u'e^u$;
- $u^\alpha : (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$ lorsque la puissance est définie ;
- $\arcsin(u) : (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ lorsque $|u| < 1$;
- $\arccos(u) : (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ lorsque $|u| < 1$;
- $\arctan(u) : (\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$.

Toujours traiter le domaine avant ou en même temps que le calcul.

Exemple

Soit

$$F(x) = \arctan(e^x).$$

Elle est définie sur tout $\mathbb{R}$ et

$$F'(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}} > 0.$$

Donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

10. Méthode d'étude et tracé qualitatif

Checklist pour une fonction usuelle ou composée

1. déterminer le domaine de définition ;
2. repérer les symétries éventuelles : parité, imparité ;
3. calculer les limites aux bornes du domaine ;
4. calculer la dérivée et son signe ;
5. déduire les variations ;
6. rechercher les asymptotes ;
7. placer quelques valeurs remarquables ;
8. seulement ensuite esquisser la courbe.

Exemple

Étudions $f(x) = \arctan x$. On a $f'(x) = 1/(1+x^2) > 0$, donc f est strictement croissante. Elle est impaire et

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm \frac{\pi}{2}.$$

La courbe traverse l'origine et admet les asymptotes horizontales $y = \pm\pi/2$.

11. Pièges à éviter**Piège classique**

- Confondre f^{-1} , fonction réciproque, et $1/f$.
- Oublier le domaine de $\ln u$: il faut $u > 0$.
- Utiliser $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ pour $x < 0$ sans justification.
- Écrire $\arcsin(\sin x) = x$ sans imposer $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.
- Oublier le signe lors de $\sqrt{1-x^2}$: il vient de l'intervalle où se trouve l'angle réciproque.
- Oublier que $\arcsin'$ et $\arccos'$ ne sont définies que sur $] -1, 1[$.
- Croire que $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 1$: la bonne identité est $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

12. Exercices corrigés essentiels**Exercice 1 — Composition trigonométrique**

Simplifier $\cos(\arcsin x)$ pour $x \in [-1, 1]$.

Correction. Posons $\theta = \arcsin x$. Alors $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, donc $\cos \theta \geq 0$. Or

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - x^2.$$

Ainsi

$$\boxed{\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Exercice 2 — Dérivée d'une composée

Dériver

$$f(x) = \ln(1 + e^x).$$

Correction. Comme $1 + e^x > 0$ pour tout x , f est définie sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

Exercice 3 — Arctangente

Étudier la fonction $g(x) = \arctan(x^2)$.

Correction. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ et paire. Sa dérivée vaut

$$g'(x) = \frac{2x}{1 + x^4}.$$

Donc g décroît sur $] -\infty, 0]$ puis croît sur $[0, +\infty[$. De plus $g(0) = 0$ et $g(x) \rightarrow \pi/2$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$.

Exercice 4 — Fonction hyperbolique

Montrer que th prend ses valeurs dans $] -1, 1[$.

Correction. Comme $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, on a $\operatorname{ch}^2 x > \operatorname{sh}^2 x$, donc $|\operatorname{sh} x| < \operatorname{ch} x$ puisque $\operatorname{ch} x > 0$. Ainsi

$$|\operatorname{th} x| = \frac{|\operatorname{sh} x|}{\operatorname{ch} x} < 1.$$

Exercice 5 — Croissances comparées

Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}.$$

Correction. Le logarithme est négligeable devant toute puissance positive. En particulier $(\ln x)^2 = o(x^{1/2})$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}} = 0.$$

13. À retenir

- $\exp$ et $\ln$ sont réciproques ; pour $x > 0$, $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.
- À $+\infty$: $\ln x \ll x^\alpha \ll e^{\beta x}$ pour $\alpha, \beta > 0$.
- $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$ viennent de restrictions bijectives de $\sin$, $\cos$, $\tan$: les intervalles principaux sont indispensables.
- $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, $(\operatorname{ch})' = \operatorname{sh}$, $(\operatorname{sh})' = \operatorname{ch}$, $(\operatorname{th})' = 1/\operatorname{ch}^2$.
- Avant tout calcul : vérifier domaine, image, signes et conditions de composition.