

Plaquette 3 – Droites et plans de l'espace : positions et distances

Géométrie du plan et de l'espace — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Plan passant par A , de vecteurs directeurs $\vec{u}, \vec{v}$: normale $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, équation $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

- **Droite** $A + t\vec{u}$; comme intersection de deux plans, $\vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$.
- **Deux droites** $(A, \vec{u}), (B, \vec{v})$: parallèles si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$; sinon coplanaires (donc sécantes) $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$.

$$d(D_1, D_2) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}, \quad d(M, D) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

- **Droite et plan** : parallèles $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$; angle φ avec $\sin \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{n}\|}$.
- **Plans parallèles** $ax + by + cz = d_1$ et $= d_2$: distance $\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Correction de l'exercice 1 – Plan défini par trois points

a) $\overrightarrow{AB} = (-2, 4, 0)$ et $\overrightarrow{AC} = (-2, 0, 4)$ ne sont pas colinéaires. Paramétrage : $(2 - 2s - 2t, 4s, 4t), s, t \in \mathbb{R}$.

b)

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (4 \cdot 4 - 0 \cdot 0, 0 \cdot (-2) - (-2) \cdot 4, (-2) \cdot 0 - 4 \cdot (-2)) = (16, 8, 8)$$

- Normale $(2, 1, 1)$: $2x + y + z = d$, et A donne $d = 4$. Équation $2x + y + z = 4$ (contrôle : $B : 4 \checkmark, C : 4 \checkmark$).

c) $2 + 1 + 1 = 4$: oui. $4s = 1, 4t = 1$ donnent $s = t = \frac{1}{4}$, et $2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1 \checkmark$

d) $d(O, (ABC)) = \frac{|0 - 4|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{6}} \approx 1,63$.

Réponse. $(ABC) : 2x + y + z = 4$; $D = A + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$; $d(O) = \frac{4}{\sqrt{6}}$.

Correction de l'exercice 2 – Deux droites : sécantes ou non coplanaires

a) $\vec{u} \wedge \vec{v} = (2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1, (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = (3, -2, -1) \neq \vec{0}$: jamais parallèles.

b) $\overrightarrow{AB_m} = (-1, 1, m - 2)$:

$$[\overrightarrow{AB_m}, \vec{u}, \vec{v}] = -3 - 2 - (m - 2) = -(m + 3)$$

- Nul $\Leftrightarrow m = -3$: sécantes pour $m = -3$, non coplanaires sinon.

c) $1 + t = s, 2t = 1 + s, 2 - t = -3 + s$. Les deux premières donnent $t = 2, s = 3$; la troisième : $0 = 0 \checkmark$ Point : $(3, 4, 0)$ (des deux côtés : $A + 2\vec{u} = (3, 4, 0)$ et $B_{-3} + 3\vec{v} = (3, 4, 0) \checkmark$).

d) $m = 0$: $d = \frac{|-3|}{\|(3, -2, -1)\|} = \frac{3}{\sqrt{14}} \approx 0,80$. Plus généralement $d = \frac{|m + 3|}{\sqrt{14}}$, nulle exactement pour $m = -3 \checkmark$

Réponse. Produit mixte $-(m+3)$; sécantes pour $m = -3$ en $(3, 4, 0)$; $m = 0 : d = \frac{3}{\sqrt{14}}$.

Correction de l'exercice 3 - Droite et plan avec paramètre

a) $\vec{u}_m \cdot \vec{n} = 1 + m + 1 = m + 2$: parallèle $\Leftrightarrow m = -2$. A vérifie $1 + 1 + 0 = 2 \neq 3 : A \notin P$, la droite est **strictement** parallèle.

b) $M = (1 + t, 1 + mt, t)$ dans $P : 2 + (m + 2)t = 3$:

$$t = \frac{1}{m+2}, \quad I_m = \left(1 + \frac{1}{m+2}, 1 + \frac{m}{m+2}, \frac{1}{m+2}\right)$$

c) $I_0 = \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$: somme 3 ✓ ; $I_1 = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$: somme 3 ✓

d) Orthogonale $\Leftrightarrow \vec{u}_m$ colinéaire à $\vec{n} = (1, 1, 1) \Leftrightarrow m = 1$. Alors I_1 est le **projeté orthogonal** de A sur P , et $AI_1 = \left|\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} = d(A, P) \checkmark \left(\frac{|2-3|}{\sqrt{3}}\right)$.

Réponse. Parallèle (strictement) pour $m = -2$; I_m avec $t = \frac{1}{m+2}$; orthogonale pour $m = 1$.

Correction de l'exercice 4 - Faisceau de plans

a) Normales $(1, 1, -1)$ et $(1, -1, 2)$ non colinéaires : les plans se coupent selon une droite de vecteur

$$\vec{d} = (1, 1, -1) \wedge (1, -1, 2) = (2 - 1, -1 - 2, -1 - 1) = (1, -3, -2)$$

b) Les coefficients $(\lambda + \mu, \lambda - \mu, -\lambda + 2\mu)$ ne sont pas tous nuls (sinon $\lambda = \mu = 0$) : c'est un plan. Tout point de Δ annule les deux parenthèses, donc l'équation.

c) En $M : 1 + 2 - 3 - 1 = -1$ et $1 - 2 + 6 = 5$. On choisit $\lambda = 5, \mu = 1$:
 $5(x + y - z - 1) + (x - y + 2z) = 0$, soit $6x + 4y - 3z - 5 = 0$.

— **Contrôles** : $M : 6 + 8 - 9 - 5 = 0 \checkmark$; $\vec{d} \cdot (6, 4, -3) = 6 - 12 + 6 = 0 \checkmark$

d) Parallèle à $(Oz) \Leftrightarrow$ coefficient de z nul : $-\lambda + 2\mu = 0, \lambda = 2, \mu = 1 : 3x + y - 2 = 0$
 (contrôle : $\vec{d} \cdot (3, 1, 0) = 3 - 3 = 0 \checkmark$).

Réponse. $\vec{d} = (1, -3, -2)$; plan par $M : 6x + 4y - 3z = 5$; plan parallèle à $(Oz) : 3x + y = 2$.

Correction de l'exercice 5 - Projeté d'un point sur une droite

a) $H = A + t\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = (2, 1, 4) \cdot (1, 1, 1) = 7$; la condition donne $t = \frac{7}{\|\vec{u}\|^2} = \frac{7}{3}$:

$$H = \left(\frac{10}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right), \quad \overrightarrow{HM} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

— **Contrôle** : $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = \frac{-1-4+5}{3} = 0 \checkmark$

b) $d = HM = \frac{\sqrt{1+16+25}}{3} = \frac{\sqrt{42}}{3} \approx 2,16$.

c) $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = (1 - 4, 4 - 2, 2 - 1) = (-3, 2, 1)$, de norme $\sqrt{14}$: $d = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{42}}{3} \checkmark$

d) $M' = 2H - M = \left(\frac{20}{3} - 3, \frac{14}{3} - 1, \frac{14}{3} - 4\right) = \left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (milieu de $[MM'] : H \checkmark$).

Réponse. $H\left(\frac{10}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$; $d = \frac{\sqrt{42}}{3}$; $M'\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Correction de l'exercice 6 - Projeter une droite sur un plan

a) $(1+t) + (1+2t) + (1+3t) = 0$, $t = -\frac{1}{2} : I\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$ (somme nulle ✓).

b) $A' = A - \frac{1+1+1}{3}(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$: le projeté de A est l'origine.

c) $D' = (IA')$, vecteur $\overrightarrow{AI} = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$, colinéaire à $(1, 0, -1)$; $D' : t(1, 0, -1)$, bien contenue dans P ($1+0-1=0$ ✓).

d) $\vec{u} \cdot \vec{n} = 6$, $\|\vec{n}\|^2 = 3$:

$$\vec{u} - 2\vec{n} = (1-2, 2-2, 3-2) = (-1, 0, 1)$$

— Colinéaire à $(1, 0, -1)$ ✓ La projection orthogonale sur un plan est une application **affine** : l'image d'une droite (non orthogonale au plan) est une droite.

Réponse. $I\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$, $A' = O$; D' dirigée par $(1, 0, -1)$ passant par O .

Correction de l'exercice 7 - Angle d'une droite et d'un plan

a) $\vec{n} = (1, 0, -1)$.

b) $\cos \alpha = \frac{|1|}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, donc $\varphi = \frac{\pi}{6}$ (30°).

c) L'angle entre une droite et un plan est l'angle entre la droite et sa projection ; il est complémentaire de l'angle avec la normale :

$$\sin \varphi = \cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{n}\|}$$

d) Projeté : $\vec{u} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = (1, 1, 0) - \frac{1}{2}(1, 0, -1) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$, de norme $\sqrt{\frac{3}{2}}$. $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)$.

— **Contrôle** : $\cos(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{1+2}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$: angle $\frac{\pi}{6}$ ✓

Réponse. $\vec{n} = (1, 0, -1)$; $\varphi = \frac{\pi}{6}$; $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)$.

Correction de l'exercice 8 - Plans parallèles et plan médian

a) Même vecteur normal $\vec{n} = (2, -1, 2)$, $\|\vec{n}\| = 3$, et seconds membres différents : parallèles distincts.

b) Formule :

$$d = \frac{|7-1|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{6}{3} = 2$$

— Projection : $A\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) \in P_1$. $A + t\vec{n} \in P_2 : 1+9t=7$, $t = \frac{2}{3}$, et la distance vaut $t\|\vec{n}\| = \frac{2}{3} \times 3 = 2$ ✓

c) $2x - y + 2z = 4$ (moyenne des seconds membres) ; contrôle : $\frac{|4-1|}{3} = \frac{|7-4|}{3} = 1$ ✓

d) $2x - y + 2z = k$ avec $\frac{|k|}{3} = 3 : k = \pm 9$. Deux plans : $2x - y + 2z = 9$ et $2x - y + 2z = -9$.

Réponse. Distance 2 ; plan médian $2x - y + 2z = 4$; à distance 3 de O : $2x - y + 2z = \pm 9$.

Correction de l'exercice 9 - Droite : paramétrage et système d'équations

a) $\vec{d} = (1, 1, 0) \wedge (0, 1, -1) = (-1-0, 0+1, 1-0) = (-1, 1, 1)$. Pour $y = 1 : x = 1, z = 0 : A(1, 1, 0)$.

b) $y = t : x = 2 - t, z = t - 1$, soit $(2, 0, -1) + t(-1, 1, 1)$: même direction, et $t = 1$ redonne A ✓

c) $x = 1 + 2s, y = 2 + s, z = 3 - s$. De la deuxième, $s = y - 2$:

$$\Delta' : \begin{cases} x - 2y = -3 \\ y + z = 5 \end{cases}$$

— **Contrôle** : $(1, 2, 3)$ vérifie $1 - 4 = -3$ ✓ et $2 + 3 = 5$ ✓

d) Un point de Δ , $(2 - t, t, t - 1)$, est sur Δ' si $2 - t - 2t = -3$ et $t + t - 1 = 5 : t = \frac{5}{3}$ et $t = 3$, incompatibles. Directions non colinéaires : Δ et Δ' sont **non coplanaires**.

Réponse. $\Delta : A(1, 1, 0), \vec{d} = (-1, 1, 1)$; $\Delta' : x - 2y = -3, y + z = 5$; non coplanaires.

Correction de l'exercice 10 - Plan contenant une droite, parallèle à une autre

a) Normale $\vec{n} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = (1 \cdot 1 - 0 \cdot 1, 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = (1, -1, 1)$. Par A : $\Pi : x - y + z = 1$.

b) $d(B, \Pi) = \frac{|0 - 0 + 2 - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

c) D_2 est parallèle à Π : tous ses points sont à la même distance de Π , et $D_1 \subset \Pi$. La plus courte distance entre les droites est donc $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Formule :

$$\frac{|\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}_1, \vec{u}_2\right]|}{\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\|} = \frac{|(-1, 0, 2) \cdot (1, -1, 1)|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \checkmark$$

d) $B(0, 0, 1)$ vérifie $0 - 0 + 1 = 1 : B \in \Pi$, donc $D_2 \subset \Pi$: droites **coplanaires** (et sécantes puisque non parallèles). Produit mixte : $(-1, 0, 1) \cdot (1, -1, 1) = 0$ ✓

Réponse. $\Pi : x - y + z = 1$; $d(D_1, D_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; avec $B(0, 0, 1)$ les droites sont sécantes.

Correction de l'exercice 11 - Le tétraèdre régulier inscrit dans un cube

a) $A(0, 0, 0), C(1, 1, 0), F(1, 0, 1), H(0, 1, 1)$. Chaque arête est une diagonale de face : longueur $\sqrt{2}$ (par exemple $CF = \|(0, -1, 1)\| = \sqrt{2}$).

b) $\overrightarrow{CF} \wedge \overrightarrow{CH} = (0, -1, 1) \wedge (-1, 0, 1) = (-1, -1, -1) : (CFH) : x + y + z = 2$ (contrôle avec C, F, H ✓). $d(A) = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

c) Base équilatérale de côté $\sqrt{2}$: aire $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

— Cube moins quatre coins (tétraèdres trirectangles de volume $\frac{1}{6}$ en B, D, E, G) :
 $1 - \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$ ✓

d) $(AFH) : \overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{AH} = (-1, -1, 1)$. Angle des normales $(1, 1, 1)$ et $(1, 1, -1) : \cos = \frac{1}{3}$ ($\approx 70,5^\circ$). C'est l'angle dièdre du tétraèdre régulier, $\arccos \frac{1}{3}$.

Réponse. Arêtes $\sqrt{2}$; $(CFH) : x + y + z = 2, d = \frac{2}{\sqrt{3}} ; V = \frac{1}{3} ; \cos = \frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 12 - Points équidistants de trois points

a) $MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y - 1)^2 \Leftrightarrow -2x = -2y \Leftrightarrow x = y$: un plan.

b) De même $MB = MC \Leftrightarrow y = z$. $L : x = y = z$, la droite dirigée par $(1, 1, 1)$ passant par O (perpendiculaire au plan $ABC : x + y + z = 1$).

c) Le centre est $L \cap (ABC) : 3t = 1$, $\omega = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ (c'est aussi le centre de gravité : triangle équilatéral de côté $\sqrt{2}$).

$$R^2 = \omega A^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{6}{9}, \quad R = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

d) Centre (t, t, t) avec $\Omega O^2 = \Omega A^2 : 3t^2 = (t-1)^2 + 2t^2$, soit $t = \frac{1}{2}$. Sphère de centre $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}$:

— $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0$ (contrôle : $A : 1 - 1 = 0 \checkmark$).

Réponse. $L : x = y = z$; cercle : centre $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $R = \sqrt{2/3}$; sphère : centre $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Correction de l'exercice 13 - Quatre points coplanaires

a) $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$, $\overrightarrow{AD_m} = (0, 1, m)$; développement selon la première ligne de $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$:

$$-1(0-1) - 1(-m-0) + 0 = 1+m$$

b) Coplanaires $\Leftrightarrow m = -1$. Plan $(ABC) : x + y + z = 1$, et $D_{-1} : 1 + 1 - 1 = 1 \checkmark$

c) $m = 1 : V = \frac{1}{6}|1+1| = \frac{1}{3}$.

d) $d(D_1, (ABC)) = \frac{|3-1|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$; aire de $ABC : \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\|(1, 1, 1)\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

— $V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \checkmark$

Réponse. $\det = 1+m$; coplanaires pour $m = -1$; $V(ABCD_1) = \frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 14 - Distance à une droite par minimisation

a) $f(t) = (1-t)^2 + (2-t)^2 + 9 = 2t^2 - 6t + 14$.

b) Minimum en $t = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} : f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{2} - 9 + 14 = \frac{19}{2}$. Donc $d = \sqrt{\frac{19}{2}} \approx 3,08$ et $H = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)$.

c) $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u} = (1, 2, 3) \wedge (1, 1, 0) = (-3, 3, -1)$, de norme $\sqrt{19}$; $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$:

$$d = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{19}{2}} \checkmark$$

d) $g(t) = \|\overrightarrow{AM}\|^2 - 2t\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} + t^2\|\vec{u}\|^2$, trinôme de coefficient dominant positif, minimal en $t = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$: c'est exactement la condition d'orthogonalité $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0$. Distance et projection orthogonale ne font qu'un.

Réponse. $f(t) = 2t^2 - 6t + 14$; $H(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)$, $d = \sqrt{19/2}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : la grande diagonale du cube

a) $B(1, 0, 0)$, $D(0, 1, 0)$, $E(0, 0, 1) : (BDE) : x + y + z = 1$. $C(1, 1, 0)$, $F(1, 0, 1)$, $H(0, 1, 1) : (CFH) : x + y + z = 2$. Même normale $(1, 1, 1) : parallèles$.

b) $\overrightarrow{AG} = (1, 1, 1)$ est normal aux deux plans : (AG) leur est orthogonale. Points $t(1, 1, 1)$: $3t = 1$ et $3t = 2$:

$$I = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad J = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

c) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{JG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$: trois segments de longueur $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

d) $d = \frac{|2-1|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = IJ$ ✓ Angle : $\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AB}}{\sqrt{3} \times 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\theta \approx 54,7^\circ$.

— I est aussi le **centre de gravité** de BDE : $\frac{(1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1)}{3}$ ✓

Réponse. $(BDE) : x + y + z = 1$, $(CFH) : x + y + z = 2$; $I(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $J(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$; $d = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.